Esercizi di Analisi LB

Fausto Ferrari

Calcolo di integrali multipli: esempio di applicazione del Teorema di riduzione e cambiamento di variabili (passaggio in coordinate sferiche).

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007.

Esercizio

Calcolare il volume della spera di raggio r in $\mathbb{R}^3$.

Sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 < r^2\}$.

Procediamo prima applicando il teorema di riduzione:

$$A_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < r^2 - z^2\},$$

$$\Pi_3(A) = \{z \in \mathbb{R} : \ A_z \neq \emptyset\}.$$

Pertanto, $\Pi_3(B) = [-r, r]$, perché occorre che $r^2 - z^2 > 0$. Quindi:

$$\begin{aligned} \text{mis}(A) = \int_A dxdydz = \int_{-r}^{r} dz \int_{A_z} dxdy \\ = \int_{-r}^{r} \text{mis}(A_z)dz = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - z^2)dz \\ = 2\pi r \int_0^r (r^2 - z^2)dz = 2[r^2 z - \frac{1}{3}z^3]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Supponiamo ora di procedere effettuando un cambiamento di variabili. Poniamo:

$$\Gamma :]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3, \ x \geq 0\}$$

dove $\Gamma(\rho, \phi, \theta) = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

La matice Jacobiana associata a Γ è la seguente:

$$\det \mathcal{I}(\rho, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin\phi\cos\theta, & \rho\cos\phi\cos\theta, & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta, & \rho\cos\phi\sin\theta, & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi, & -\rho\sin\phi, & 0 \end{bmatrix}.$$

Sviluppando i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} \det \mathcal{I}(\rho, \phi, \theta) &= \rho^2 \sin^3\phi \cos^2\theta + \rho^2 \cos^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin\phi \sin\theta (\sin^2\phi \sin\theta + \cos^2\phi \sin\theta) \\ &= \rho^2 \sin\phi \cos^2\theta (\sin^2\phi + \cos^2\phi) + \rho^2 \sin\phi \sin^2\theta \\ &= \rho^2 \sin\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2 \sin\phi. \end{aligned}$$

Pertanto $A \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0\} = \Gamma(B)$, dove

$$B = \{(\rho, \phi, \theta) \in]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[: 0 < \rho < r\}$$

con $\Gamma : B \to A \setminus \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0\}$ cambiamento di variabili. Quindi, essendo $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0\}$ un insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^3$, concludiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{mis}(A) &= \int_{A \setminus \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0\}} dxdydz = \int_B \mid \rho^2 \sin(\phi) \mid d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin(\phi) d\phi \int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$