I NUMERI COMPLESSI

FAUSTO FERRARI

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Energetica e Meccanica N-Z dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2003/2004

1. Come definire il campo dei numeri complessi

Supponiamo di introdurre le due seguenti operazioni sull'insieme $\mathbb{R}^2$. Per ogni $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ poniamo:
$(a,b)+(c,d) = (a+b, c+d)$ (addizione)
e
$(a,b) * (c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ (moltiplicazione).
Notiamo che si tratta di operazioni ben definite perché hanno immagine in $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.1. *L'insieme $\mathbb{R}^2$ con le operazioni introdotte $+$ e $*$ è un campo. Infatti*

- *L'operazione di addizione $+$ è associativa e commutativa. Inoltre per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ esiste l'elemento opposto $(-a,-b)$ tale che $(a,b)+(-a,-b) = (0,0)$, dove è $(0,0)$ è l'elemento neutro additivo. Quindi $\mathbb{R}^2$ con tale operazione è un gruppo abeliano.*
- *L'operazione di moltiplicazione $*$ è associativa e commutativa. Inoltre per ogni $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a,b) \neq (0,0)$ esiste l'elemento opposto $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ ed è unico in particolare si ha*
$$(a,b) * (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (1,0),$$
dove $(1,0)$ è l'elemento neutro moltiplicativo.
- *La moltiplicazione è distributiva sia a destra che a sinistra, cioè per ogni $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$*
$$(a,b) * ((c,d)+(e,f)) = (a,b)*(c,d) + (a,b)*(e,f) = ((c,d)+(e,f)) * (a,b).$$

Definiamo insieme dei numeri complessi il campo $(\mathbb{R}^2, +, *)$.

Vediamo che questa nuova struttura contiene, propriamente almeno nel senso che preciseremo, l'insieme dei numeri reali e quindi può essere considerata una sua estensione. Indicheremo l'insieme dei numeri complessi con la lettera $\mathbb{C}$. La prima osservazione consiste nel provare che l'insieme
$$R = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$$
è un sottocampo di $\mathbb{C}$, cioè che le operazioni $+, *$ ristrette a R sono chiuse su R e che R con tali operazioni è un campo. La verifica è immediata. Questo sottocampo gioca un ruolo fondamentale, infatti può essere identificato con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Definiamo la seguente applicazione $r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $r(a) = (a,0)$. Questa applicazione gode delle proprietà seguenti

i) per ogni $a,b \in \mathbb{R}$, $r(a+b) = r(a) + r(b)$ (osservare il diverso significato di addizione nel dominio e nel codominio)
ii) per ogni $a,b \in \mathbb{R}$, $r(ab) = r(a) * r(b)$
iii $r : \mathbb{R} \to r(\mathbb{R}) = R$ è biiettiva.

Date: 15/02/2004.

Dalle proprietà i) e iii) segue che $r : \mathbb{R} \to r(\mathbb{R}) = R$ è un isomorfismo di campi. Questo fatto permette di identificare $\mathbb{R}$ con R. In virtù di questa identificazione potremo scrivere a anziché $(a, 0)$ tutte le volte che ciò sarà necessario. In particolare scriveremo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ proprio perché $R \subset \mathbb{C}$ e $R \equiv \mathbb{R}$.

2. Rappresentazione algebrica dei numeri complessi

Sia $(a, b) \in \mathbb{C}$. Allora
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$
Notiamo che il numero complesso $(0, 1)$ ha come particolare proprietà quella di determinare uno *scambio* di coordinate del numero complesso $(0, b)$ per il quale viene moltiplicato. Infatti
$$(0, 1) * (b, 0) = (0, b).$$
Quindi, grazie all'identificazione fatta in precedenza si ha
$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) * (b, 0) = a + (0, 1)b.$$
Denoteremo per semplicità $i \equiv (0, 1)$ e chiameremo questo numero complesso unità immaginaria. Dunque la notazione algebrica del numero complesso $(a, b) \in \mathbb{C}$ è $a+ib$. In particolare se $a+ib \in \mathbb{C}$ chiameremo a parte reale e b parte immaginaria. Il modulo del numero complesso $a + ib \in \mathbb{C}$ è
$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$
In base a quanto detto le operazioni tra numeri complessi si sviluppano formalmente esattamente secondo le regole già note per i numeri reali. Infatti dati $a + ib$ e $c + id$ due numeri complessi
$$(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$$
$$(a + ib) * (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(bc + ad).$$
Infatti $i^2 = (0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) \equiv -1$. Se $a + ib \in \mathbb{C}$ il numero $a - ib$:'e detto complesso coniugato di $a + ib$. Se $z \in \mathbb{C}$ scriveremo $\bar{z}$ per indicare il suo complesso coniugato. Vale il seguente risultato

Lemma 2.1.
- *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ $|z| = |\bar{z}|$.
- *Per ogni* $z, v \in \mathbb{C}$, $|zv| = |zv|$.
- *Per ogni* $z, v \in \mathbb{C}$, $v \neq 0$ $|\frac{z}{v}| = \frac{|z|}{|v|}$

3. Rappresentazione trigonometrica (polare) dei numeri complessi

Il numero complesso $a+ib$ è un punto di $\mathbb{R}^2$ e come tale può essere univocamente individuato da due numeri che rispettivamente sono la distanza del punto dall'origine e la magnitudo dell'angolo formato dalla retta per il punto dato e $(0, 0)$ e la retta delle ascisse secondo il verso sinistrorso. Infatti se $a + ib \in \mathbb{C}$ allora
$$\begin{aligned} a + ib &= \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2}(\cos\theta + i \sin\theta) = |a + ib|(\cos\theta + i \sin\theta) \end{aligned}$$
Chiameremo quindi argomento di un numero complesso $z \neq 0$ un qualunque valore di $\mathbb{R}$ tale che
$$\arg(z) \in \{\theta \in \mathbb{R} : \ z =| z | (\cos\theta, \sin\theta)\}.$$
Osserviamo che due numeri complessi u, v non nulli possono essere scritti come $u =| u | (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)\}$ e $v =| v | (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)\}$. Ebbene $u = v$ se e solo se $\mathrm{Re}(u) = \mathrm{Re}(v)$ e $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v)$ cioè se
$$| u | \cos\theta_1 =| v | \cos\theta_2$$
e
$$| u | \sin\theta_1 =| v | \sin\theta_2.$$

Quadrando e sommando si ottiene $| u |=| v |$. D'altra parte sostituendo nelle precedenti equazioni si ottiene

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2$$

e

$$\sin\theta_1 = \sin\theta_2.$$

Quindi

$$\theta_1 = \pm\theta_2 + 2k\pi, \tag{1}$$

$k \in \mathbb{Z}$. Se supponiamo che $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ allora ricaviamo $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$ da cui segue $\theta_1 = \theta_2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e ricordando (1) segue $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto se $\arg(z) \in [0, 2\pi[$, allora i due numeri complessi coincidono. La determinazione dell'argomento non è unica. Se fissiamo un intervallo, per esempio $[0, 2\pi[$ o $] - \pi, \pi]$ si parla di argomento principale. L'argomento principale viene indicato con lettera maiuscola $\mathrm{Arg}(z)$. Supponiamo ora di considerare un numero complesso di modulo 1. Allora $z = \cos\theta + i\sin\theta$. Sviluppando la funzione $\sin\theta$ e $\cos\theta$ si ottengono due serie

$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \text{ e } \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Non è difficile dimostrare che convergono su tutto $\mathbb{R}$ e in particolare

$$\cos\theta = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\theta^{2j}}{(2j)!} \text{ e } \sin\theta = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Scriviamo le rispettive somme parziali S_n e C_n e consideriamo

$$S_n + iC_n = \sum_{j=0}^{n}((-1)^j\frac{\theta^{2j}}{(2j)!} + i(-1)^j\frac{\theta^{2j+1}}{(2j+1)!}) = \sum_{j=0}^{n} i^j\frac{\theta^j}{j!}.$$

D'altra parte si prova che

$$\exp(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\theta^j}{j!},$$

quindi formalmente possiamo definire la funzione

$$\mathrm{Exp}(i\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^j}{j!}.$$

La serie così definita è assolutamente convergente. In particolare otteniamo che

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = \mathrm{Exp}(i\theta).$$

Teorema 3.1. *(Formula di Moivre) Per ogni $n \in N$ vale la seguente identità per ogni $\theta \in \mathbb{R}$:*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

In base alla formula di De Moivre si ottiene allora che se $|z| = 1$ e $z \in \mathbb{C}$ si ha

$$z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\mathrm{Exp}(i\theta))^n = \mathrm{Exp}(in\theta).$$

In realtà si definisce la funzione Exp si può definire su $\mathbb{C}$ e per ogni $u, v \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{Exp}(u + v) = \mathrm{Exp}(u)\mathrm{Exp}(v).$$

In particolare vale

$$\mathrm{Exp}(a + ib) = \mathrm{Exp}(a)\mathrm{Exp}(ib) = e^a e^{ib}.$$

Spesso utilizzeremo la notazione esponenziale senza lettera maiuscola. Esaminiamo ora come scrivere un numero complesso in notazione esponenziale. Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$ allora

$$a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))) = |z|e^{i\arg(z)}.$$

La notazione esponenziale si rivela molto utile nei calcoli. Per esempio, calcolare l'argomento del seguente numero complesso
$$\frac{3+i2}{-5+i}.$$
Allora
$$\frac{3+i2}{-5+i} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{26}} e^{i(\arg(3+i2)-\arg(-5+i))}.$$
Sarà pertanto importante saper calcolare una determinazione dell'argomento del numero complesso. Scriveremo il caso dell'Arg$(z) \in [0, 2\pi[$. Occorre distinguere i casi in relazione al quadrante.

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$

- Se $a > 0$ e $b \geq 0$, allora $\text{Arg}(z) = \arctan \frac{b}{a}$.
- Se $a < 0$ e $b \geq 0$, allora $\text{Arg}(z) = \arctan \frac{b}{a} + \pi$.
- Se $a < 0$ e $b \leq 0$, allora $\text{Arg}(z) = \arctan \frac{b}{a} + \pi$.
- Se $a > 0$ e $b < 0$, allora $\text{Arg}(z) = \arctan \frac{b}{a} + 2\pi$.
- Se $a = 0$ e $b > 0$, allora $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{2}$.
- Se $a = 0$ e $b < 0$, allora $\text{Arg}(z) = \frac{3\pi}{2}$.

4. Risoluzione dell'equazione $z^n = u$

Risolviamo l'equazione $z^n = u$, dove $u \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{C}$. Poniamo u in forma esponenziale $u = |u|e^{i\arg(u)}$. Analogamente per $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Quindi dovrà essere
$$|z|^n e^{in\arg(z)} = |u|e^{i\arg(u)}.$$
In particolare risulta $|z|^n = |u|$, perché $|e^{in\arg(u)}| = |e^{i\arg(v)}| = 1$. Quindi avremo anche che
$$e^{in\arg(z)} = e^{i\arg(u)},$$
ovvero $e^{i(n\arg(z)-\arg(u))} = 1$. Finalmente
$$n\arg(z) - \arg(u) = 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z},$$
cioè
$$\arg(z) = \frac{\arg(u) + 2k\pi}{n}.$$
Vale in particolare il seguente Teorema.

Teorema 4.1. *Sia $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ allora la seguente equazione*
$$z^n = u$$
ha n soluzioni distinte così determinate. Posto arg(u) un argomento di u le soluzioni z_k, $k = 0, \dots, n-1$, sono
$$z_k = \mid u \mid^{\frac{1}{n}} \; exp(i\frac{arg(u) + 2k\pi}{n}).$$