ALCUNE OSSERVAZIONI INERENTI L'INTEGRAZIONE MULTIPLA

FAUSTO FERRARI

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007

Nelle seguenti sezioni sviluppiamo alcune ulteriori considerazioni in merito all'integrazione multipla.

1. Integrazione mediante cambiamento di variabili

Definizione 1.1. *(Cambiamento di variabili regolare) Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ aperti. Diremo che $\psi : A \to B$ è un cambiamento di variabili regolare se:*

1) $\psi \in C^1(A, B)$*;*
2) ψ *è iniettiva e suriettiva;*
3) $detJ\psi(x) \neq 0$*, per ogni* $x \in A$*.*

Ricordiamo che i domini semplici sono insiemi chiusi e limitati per definizione. Se consideriamo funzioni continue definite su domini semplici e poi ne modifichiamo il valore su sottoinsiemi che sono grafici di funzioni continue, allora le nuove funzioni sono ancora integrabili sugli stessi domini semplici e il loro integrale coincide con l'integrale delle rispettive funzioni non modificate sugli stessi domini semplici di definizione. Non entreremo ulteriormente nel dettaglio di un argomento che richiederebbe la trattazione della teoria della misura, argomento non oggetto del nostro corso, tuttavia per meglio comprendere il significato di quanto detto osserviamo in un esempio che l'area del grafico di una funzione continua è nullo. Infatti sia $D = \{(x, y) : y = f(x),\ \ f \in C([a, b])\}$. Il dominio D è y semplice e l'integrale

$$\int\int_D 1dxdy = \int_a^b (\int_{f(x)}^{f(x)} 1dy)dx = 0,$$

perché $\int_{f(x)}^{f(x)} 1dy = 0$. Pertanto, più in generale, se la funzione $g \in C(K)$ è integrabile sul dominio semplice K, allora $g_{|(K\setminus\Sigma)}$, dove Σ è il grafico di una funzione continua, sarà integrabile su $K \setminus \Sigma$ e

$$\int\int_K g(x, y)dxdy = \int\int_{K\setminus\Sigma} g(x, y)dxdy.$$

Teorema 1.1. *(Integrazione mediante cambiamento di variabili) Sia $f : B \to \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in C(B)$. Sia $\psi : A \to B$ un cambiamento di variabili regolare con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Se $K \subset B$ è un dominio semplice, $\psi^{-1}(K) \subset A$ è semplice e $x \to f(\psi(x)) \mid detJ\psi(x) \mid$ è integrabile in $\psi^{-1}(K)$, allora*

$$\int_B f(y)dy_1dy_2 \ldots dy_n = \int_{\psi^{-1}(K)} f(\psi(x)) \mid detJ\psi(x) \mid dx_1dx_2 \ldots dx_n.$$

Gli esempi più rilevanti di cambiamenti di variabili sono i seguenti.

a) Applicazioni lineari invertibili $L_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dove M è la matrice $n \times n$ che rappresenta la trasformazione lineare. In tal caso $L = \psi$ e $\mid \det J\psi(x) \mid = \mid \det M \mid$.

Date: 08/03/2004.

b) Passaggio in coordinate polari (caso omogeneo)

$$CP :]0, 2\pi[\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\mathbb{R}^2,\ \ x \geq 0\}$$

$CP(\theta,\rho) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, cioè $CP_1(\theta,\rho) \equiv x = \rho\cos\theta$ e $CP_2(\theta,\rho) \equiv y = \rho\sin\theta$, inoltre

$$|\ \det JCP(\theta,\rho)\ | = \rho$$

c) Passaggio in coordinate polari (caso non omogeneo)

$$CPN :]0, 2\pi[\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\mathbb{R}^2,\ \ x \geq 0\}$$

$CPN(\theta,\rho) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)$, cioè $CPN_1(\theta,\rho) \equiv x = a\rho\cos\theta$ e $CPN_2(\theta,\rho) \equiv y = b\rho\sin\theta$, dove $a, b \in \mathbb{R}^+$ sono numeri fissati, inoltre

$$|\ \det JCPN(\theta,\rho)\ | = ab\rho$$

d) Passaggio in coordinate cilindriche (caso omogeneo)

$$CPC :]0, 2\pi[\times\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)\mathbb{R}^3,\ \ x \geq 0\}$$

$CPC(\theta,\rho,t) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$, cioè $CPC_1(\theta,\rho,t) \equiv x = \rho\cos\theta$ e $CPC_2(\theta,\rho) \equiv y = \rho\sin\theta$ e $CPC_3(\theta,\rho) \equiv z = t$, inoltre

$$|\ \det JCPC(\theta,\rho,t)\ | = \rho$$

e) Passaggio in coordinate cilindriche (caso non omogeneo)

$$CPCN :]0, 2\pi[\times\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z)\mathbb{R}^3,\ \ x \geq 0\}$$

$CPC(\theta,\rho,t) = (a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta, t)$, cioè $CPC_1(\theta,\rho,t) \equiv x = a\rho\cos\theta$ e $CPC_2(\theta,\rho) \equiv y = b\rho\sin\theta$ e $CPC_3(\theta,\rho) \equiv z = t$, dove $a, b \in \mathbb{R}^+$ sono numeri fissati, inoltre

$$|\ \det JCPCN(\theta,\rho,t)\ | = ab\rho$$

f) Coordinate sferiche (caso omogeneo)

$$CS :]0, 2\pi[\times]0,\pi[\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z), x, z \geq 0\}$$

$CS(\theta,\phi,\rho) = (\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$, cioè $CS_1(\theta,\phi,\rho) \equiv x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $CS_2(\theta,\phi,\rho) \equiv y = \rho\sin\theta\sin\phi$ e $CS_3(\theta,\phi,\rho) \equiv z = \rho\cos\phi$, inoltre

$$|\ \det JCS(\theta,\phi,\rho)\ | = \rho^2\sin\phi$$

g) Coordinate sferiche (caso non omogeneo)

$$CS :]0, 2\pi[\times]0,\pi[\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z), x, z \geq 0\}$$

$CSN(\theta,\phi,\rho) = (a\rho\cos\theta\sin\phi, b\rho\sin\theta\sin\phi, c\rho\cos\phi)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ numeri fissati, cioè $CSN_1(\theta,\phi,\rho) \equiv x = a\rho\cos\theta\sin\phi$, $CSN_2(\theta,\phi,\rho) \equiv y = b\rho\sin\theta\sin\phi$ e $CSN_3(\theta,\phi,\rho) \equiv z = c\rho\cos\phi$; inoltre

$$|\ \det JCSN(\theta,\phi,\rho)\ | = abc\rho^2\sin\phi.$$

2. Come scegliere la riduzione

Dal punto di vista operativo il dominio di integrazione non è quasi mai fornito in modo esplicito come dominio $x-$semplice o y-semplice. Nella maggioranza dei casi, specialmente per integrazioni di domini in dimensione maggiore o uguale a 3 può risultare difficile individuare la riduzione soltanto esaminando il grafico che individua il dominio. Infatti il modo corretto ̀quello di considerare i vincoli imposti dalle disequazioni. A tal fine se A è un dominio semplice di $\mathbb{R}^2$ congelando la x abbiamo

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}: \ (x, y) \in A\} = [g_2(x), g_1(x)],$$

dunque occorre stabilire qual è il dominio di g_2 eg_1 oltre che le rispettive leggi implicitamente date nella definizione di A. A tal fine cioè occorre determinare

$$\Pi_1(A) = \{x \in \mathbb{R}: \ A_x \neq \emptyset\},$$

dove $\Pi_1(A)$ non è altro che il dominio di g_1 e g_2. Vediamo un esempio. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ 0 \leq y \leq 1; \ y \leq x^2\}$, calcolare

$$\int\int_A x^3 dxdy.$$

Determiniamo A_x e $\Pi_1(A)$. Avremo quindi, considerando la x come se fosse una costante,

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}: \ 0 \leq x \leq 2, \ y \leq x^2, \ 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1] \cap] - \infty, x^2],$$

per $x \in [0, 2]$. Quindi $A_x \neq \emptyset$ se $x^2 \geq 0$ e $x \in [0, 2]$. D'altra parte per $x \in [0, 2]$

$$A_x = \begin{cases} [0, x^2], & \text{se } x^2 \leq 1 \\ [0, 1], & \text{se } x^2 \geq 1, \end{cases}$$

quindi risolvendo

$$\begin{cases} x^2 \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

si ottiene

$$A_x = [0, x^2], \ \text{se } x \in [0, 1].$$

Mentre risolvendo

$$\begin{cases} x^2 \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

si ottiene

$$A_x = [0, 1], \ \text{se } x \in [1, 2].$$

Pertanto

$$\int\int_A x^3 dxdy = \int_{\Pi_1(A)} dx(\int_{A_x} x^3 dy) = \int_0^1 (\int_0^{x^2} x^3 dy) dx + \int_1^2 (\int_0^1 x^3 dy) dx.$$

Il teorema di riduzione permette di trasformare un integrale multiplo in un integrale ripetuto, tuttavia per gli integrali ripetuti non è detto che esista una primitiva che si possa esprimere per mezzo di funzioni elementari. Per questa ragione a volte accade che la riduzione sia più agevole se praticata prima rispetto ad una o più variabili anziché rispetto ad altre. Vediamo un esempio; calcolare

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{2x}{1 + xy} dxdy.$$

Se riduciamo l'insieme come y-semplice si ottiene

$$\begin{aligned}\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{2x}{1+xy}dxdy &= 2\int_0^1(\int_0^1 \frac{x}{1+xy}dy)dx = 2\int_0^1 \log(1+y)dx \\ &= 4\log 2 - 2.\end{aligned}$$

Se procediamo riducendo l'insieme come x-semplice

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{2x}{1+xy}dxdy = 2\int_0^1(\int_0^1 \frac{x}{1+xy}dx)dy = 2\int_0^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\log(1+y))dy.$$

Notiamo che nel membro di destra è comparso un integrale generalizzato (convergente) nonostante l'integrale di partenza non lo fosse. Purtroppo il calcolo di una primitiva, quando è possibile, non è detto che sia agevole! Ciò nonostante

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{2x}{1+xy}dxdy = = 2\int_0^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\log(1+y))dy = 4\log 2 - 2.$$

Questo assieme ad altri esempi che si possono costruire abbastanza facilmente prova che la scelta secondo quale asse ridurre l'integrale è di notevole importanza.

Osservazione 2.1. *Nel caso precedente se si integra ancora per parti considerando $\epsilon > 0$ otteniamo il seguente integrale generalizzato:*

$$\begin{aligned}&\int_\epsilon^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\log(1+y))dy = [\log y]_{y=\epsilon}^{y=1} + [\frac{1}{y}\log(1+y)]_{y=\epsilon}^{y=1} - \int_\epsilon^1 \frac{1}{y(1+y)}dy \\ =\ & [\log y + \frac{1}{y}\log(1+y)]_{y=\epsilon}^{y=1} - \int_\epsilon^1 \frac{1+y-y}{y(1+y)}dy = [\log y + \frac{1}{y}\log(1+y)]_{y=\epsilon}^{y=1} - \int_\epsilon^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1})dy \\ =\ & [\log y + \frac{1}{y}\log(1+y) - \log y + \log(y+1)]_{y=\epsilon}^{y=1} = [\frac{1+y}{y}\log(y+1)]_{y=\epsilon}^{y=1}.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\log(1+y))dy &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\log(1+y))dy = \lim_{\epsilon\to 0}[\frac{1+y}{y}\log(y+1)]_{y=\epsilon}^{y=1} \\ &= 2\log 2 - \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\log(\epsilon+1) = 2\log 2 - 1.\end{aligned}$$

Quindi ritroviamo il valore già calcolato

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{2x}{1+xy}dxdy = = 2\int_0^1 (\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\log(1+y))dy = 4\log 2 - 2.$$

Notiamo d'altra parte che alcuni integrali definiti di funzioni in $\mathbb{R}$, di cui non è possibile scrivere una primitiva utilizzando funzioni elementari, sono invece facilmente calcolabili nel caso di funzioni di più variabili mediante opportuni cambiamenti di variabili.

Per esempio passando in coordinate polari

$$\begin{aligned}&\int\int_{x^2+y^2<r^2} \exp(-x^2-y^2)dxdy = \int\int_{]0,2\pi[\times]0,r[} \rho\exp(-\rho^2)d\rho d\theta \\ =\ & 2\pi[-\frac{1}{2}\exp(-\rho^2)]_{\rho=0}^{\rho=r} = \pi(1-\exp(-r))\end{aligned}$$

In particolare se assegnamo un significato a

$$\lim_{r\to\infty}\int\int_{x^2+y^2<r^2} \exp(-x^2-y^2)dxdy = \pi$$

ponendo

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2 - y^2) dx dy = \pi$$

e assumendo di poter applicare il teorema di riduzione si ha

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) dx \int_{\mathbb{R}} \exp(-y^2) dy,$$

dove

$$I = \int_{\mathbb{R}} \exp(-s^2) ds.$$

Pertanto

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi}.$$