ESERCIZIO

Sia $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ e poniamo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = g\left(x^2 + y^2 + \cos\left(3x + x^2 + 2y + 3y^2 + 1\right), 2x + \sin\left(2x^2 + y + 3y^2 + 1\right)\right) .$$

Sapendo che

$$\mathcal{J}_g(0,0) = \begin{bmatrix} 0, e \\ e, 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{J}_g(\cos(1), \sin(1)) = \begin{bmatrix} \pi, 0 \\ 0, \pi \end{bmatrix},$$

calcolare $\mathcal{J}_f(0,0)$.

R.:

$$\mathcal{J}_f(0,0) = \begin{bmatrix} -\pi 3\sin(1), & -\pi 2\sin(1) \\ 2\pi, & \pi\cos(1) \end{bmatrix}.$$

ESERCIZIO

Posto

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^3 + 9xy^2 - 4x,$$

determinare i punti critici di f e classificarli.

R.:$\left(0, \pm\frac{2}{3}\right)$ punti a sella

$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ punti di minimo/massimo locali

ESERCIZIO

Risolvere l'equazione in campo complesso

$$\left(z^3 + 1 - e\mathrm{i}\right)\left(z^2 + (2+3)\mathrm{i}z - 32\right) = 0$$

R.:$z_k = (1+e^2)^{\frac{1}{6}} \exp(i\frac{\phi + 2k\pi}{3})$, $k = 0, 1, 2$ e $\phi = \pi - \arctan e$

$$z_3 = -i2, \ \ z_4 = -3i$$

ESERCIZIO

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare

$$y'' + 4y = 3\cos(2x).$$

R.:

$$\left\{ y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; y(x) = \frac{3}{4}x\sin(2x) + C\cos(2x) + D\sin(2x) \ , C, D \in \mathbb{R} \right\}.$$

ESERCIZIO

Il candidato risolva, in un foglio separato, il seguente esercizio, giustificando adeguatamente le affermazioni fatte.

Determinare la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3(x-2) \\ y(2) = 3 \end{cases}$$

R.:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{1/9 - (x-2)^2}}, \ 5/3 < x < 7/3.$$