II PROVA PARZIALE (13/4/2007)

ESERCIZIO 1

[3 punti] Determinare per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}^+$ converge l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1-e^{-2x})^{\frac{\gamma}{2}}}{x^3+x^\gamma}\, dx\,.$$

ESERCIZIO 2

[4 punti] Siano

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 \le e^2,\ \ z \le e,\ \ z + 2e \ge -\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2} \right\}$$

e $f \in \mathcal{C}(B;\mathbb{R})$. Determinare esplicitamente $a, b \in \mathbb{R}$ e gli insiemi $B_z \subset \mathbb{R}^2$ tali che:

$$\int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int\int_{B_z} f(x,y,z)\,dxdy \right)\, dz\,.$$

ESERCIZIO 3

[4 punti] Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_E e^{-x^2-y^2}(y^2+5)dxdy\,,$$

dove

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x^2+y^2 \le 4,\ \ y \ge -\sqrt{3}\mid x \mid \right\}.$$

ESERCIZIO 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_K y e^{2x}\, dxdy\,,$$

dove

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x \le -y^2+9,\ \ y \ge 0,\ \ x \ge y-3 \right\}.$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO

[5 punti] Il candidato risolva, in un foglio separato, il seguente esercizio, giustificando adeguatamente le affermazioni fatte.

Determinare per quali valori di $\gamma \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh\left(\frac{1}{n^\gamma+\sqrt{n}}\right)}{\sqrt[3]{n+\arctan(n^2)}}$$

è convergente.