ALCUNE OSSERVAZIONI INERENTI L'INTEGRAZIONE DI FUNZIONI SU INSIEMI LIMITATI

FAUSTO FERRARI

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007

1. Teoremi di riduzione

Definizione 1.1 (Ricoprimento). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi di $\mathbb{R}^n$. Se*

$$\Omega \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

allora diremo che $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di Ω. Se esiste $\bar{j} \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $j > \bar{j}$, $A_j = \emptyset$ e

$$\Omega \subset \bigcup_{j=0}^{\bar{j}} A_j$$

diremo che $\{A_0, A_1, \dots, A_{\bar{n}}\}$ è un ricoprimento finito di Ω.

Definizione 1.2 (Insieme trascurabile o di misura nulla). *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ un insieme. Se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito $\{A_0, A_1, \dots, A_{\bar{n}}\}$, di Σ, tale che per ogni $j = 0 \dots, \bar{j}$, $A_j = [a_{1,j}, b_{1,j}] \times [a_{2,j}, b_{2,j}] \times \cdots \times [a_{n,j}, b_{n,j}]$ e*

$$\sum_{j=0}^{\bar{j}} \prod_{k=1}^{n} (b_{k,j} - a_{k,j}) < \epsilon,$$

allora diremo che Σ è un insieme trascurabile o di misura nulla.

Alcuni esempi. I punti sono trascurabili in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. I segmenti e i grafici di funzioni continue su intervalli chiusi e limitati sono trascurabili in $\mathbb{R}^2$ e in $\mathbb{R}^3$, mentre non sono trascurabili in $\mathbb{R}$. Ogni circonferenza è trascurabile in $\mathbb{R}^2$, la frontiera di ogni poligono regolare è trascurabile in $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.3 (Somme inferiori e superiori). *Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un ipercubo di $\mathbb{R}^n$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Per ogni $i = 1, \dots, n$ siano $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Denoteremo, per ogni $i = 1, \dots, n$, con Q_{x_i} una scomposizione di m_i+1 punti dell'intervallo $[a_i, b_i]$: $Q_{x_i} = \{a_i = a_{i,0} < a_{i,1} < \dots a_{i,m_i} = b_i\}$. Sia $R_{k_1,k_2,\dots k_n}$, $1 \leq k_i \leq m_i$ l' ipercubo di multi-indice $(k_1, k_2, \dots k_n)$ della scomposizione prodotto, cioè*

$$R_{k_1,k_2,\dots k_n} = [a_{1,k_1-1}, a_{1,k_1}] \times [a_{2,k_1-1}, a_{2,k_1}] \times \cdots \times [a_{n,k_1-1}, a_{n,k_1}].$$

La somma superiore di f associata alla scomposizione $(Q_{x_1}, Q_{x_2}, \dots, Q_{x_n})$ è il numero

$$S(f) = \sum_{k_1,k_2,\dots k_n=1}^{m_1,m_2,\dots m_n} \sup_{R_{k_1,k_2,\dots k_n}} f \mid R_{k_1,k_2,\dots k_n} \mid .$$

Date: 08/03/2004.

La somma inferiore di f associata alla scomposizione $(Q_{x_1}, Q_{x_2}, \dots, Q_{x_n})$ è il numero

$$s(f) = \sum_{k_1,k_2,\dots k_n=1}^{m_1,m_2,\dots m_n} \inf_{R_{k_1,k_2,\dots k_n}} f \mid R_{k_1,k_2,\dots k_n} \mid .$$

Mentre $\mid R_{k_1,k_2,\dots k_n} \mid$ indica la misura dell'ipercubo $R_{k_1,k_2,\dots k_n}$, cioè

$$\mid R_{k_1,k_2,\dots k_n} \mid = \prod_{p=1}^{n} (a_{p,k_p} - a_{p,k_p-1}).$$

Se $n = 2$, il generico rettangolo di indice (k_1, k_2) è $R_{k_1,k_2} = [a_{1,k_1-1}, a_{1,k_1}] \times [a_{2,k_1-1}, a_{2,k_1}]$ mentre $\mid R_{k_1,k_2} \mid = (a_{1,k_1} - a_{1,k_1-1})(a_{2,k_1} - a_{2,k_1-1})$ è l'area di R_{k_1,k_2}.

Indicheremo con $\mathcal{S}(Q)$ l'insieme di tutte le scomposizioni indotte dalle scomposizioni D_{x_i}, $i = 1, \dots, n$ in Q.

Definizione 1.4. *Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un ipercubo di $\mathbb{R}^n$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se*

$$\inf_{D \in \mathcal{S}(Q)} S(f) = \sup_{D \in \mathcal{S}(Q)} s(f),$$

allora diremo che la funzione f è integrabile su Q e chiameremo integrale di f il numero $\inf_{\mathcal{S}(Q)} S(f) = \sup_{\mathcal{S}(Q)} s(f)$. Denoteremo tale numero con il simbolo

$$\int_Q f(x_1, \dots, x_n) dx_1, dx_2, \dots, dx_n.$$

Indichiamo con $\mathcal{S}(Q)_\delta$ le scomposizioni di $\mathcal{S}(Q)$ tali che per ogni $p = 1, \dots, n$

$$\max_{1 \le k_p \le m_p} (a_{p,k_p} - a_{p,k_p-1}) < \delta.$$

Teorema 1.1. *Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un ipercubo di $\mathbb{R}^n$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. La funzione f è integrabile se e soltanto se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale*

$$S(f) - s(f) < \epsilon,$$

per ogni scomposizione $D \in \mathcal{S}(Q)_\delta$.

Teorema 1.2. *Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un ipercubo di $\mathbb{R}^n$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile su Q.*

Teorema 1.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua su Ω. Se $\partial\Omega$ è di misura nulla, allora f è integrabile su Q.*

Teorema 1.4. *Sia $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un ipercubo di $\mathbb{R}^n$ e $f : Q \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $Q \setminus \Sigma$ e Σ è di misura nulla, allora f è integrabile su Q.*

Teorema 1.5. *Siano $Q = [a, b] \times [c, d]$, $a < b$, $c < d$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se $f : Q \to \mathbb{R}$ è integrabile e per ogni $x \in [a, b]$ la funzione $y \to f(x, y)$ è integrabile su $[c, d]$, allora la funzione $x \to \int_c^d f(x, y) dy$ è integrabile su $[a, b]$ e*

$$\int_Q f(x, y) dx dy = \int_a^b (\int_c^d f(x, y) dy) dx.$$

Analogamente

Teorema 1.6. *Siano $Q = [a, b] \times [c, d]$, $a < b$, $c < d$ e $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se $f : Q \to \mathbb{R}$ è integrabile e per ogni $y \in [c, d]$ la funzione $x \to f(x, y)$ è integrabile su $[a, b]$, allora la funzione $y \to \int_a^b f(x, y) dx$ è integrabile su $[c, d]$ e*

$$\int_Q f(x, y) dx dy = \int_c^d (\int_a^b f(x, y) dx) dy.$$

Corollario 1.1. *Sia* Ω

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), \ \ \phi_1, \phi_2 : [c,d] \to \mathbb{R} \ \ continue \ \ su \ \ [c,d]\},$$

cioè un insieme $x-$*semplice. Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *è continua, allora*

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_c^d (\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Corollario 1.2. *Sia* Ω

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, h_1(x) \leq y \leq h_2(y), \ \ h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R} \ \ continue \ \ su \ \ [a,b]\},$$

cio è un insieme $y-$*semplice. Se* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *è continua, allora*

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{h_1(x)}^{h_2(d)} f(x,y)dy)dx.$$

Dimostrazione. La dimostrazione dei precedenti corollari è la seguente (vediamo solo il secondo corollario). Se Ω è un insieme $y-$ semplice dal Teorema di Weierstrass segue che è anche limitato in $\mathbb{R}^2$. Sia $Q = [a,b] \times [c,d]$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$ che contiene Q. Definiamo la funzione

$$\tilde{f} : Q \to \mathbb{R}$$

come segue: $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ se $(x,y) \in \Omega$ e $\tilde{f}(x,y) = 0$ se $(x,y) \in Q \setminus \Omega$. Essa è continua in $Q \setminus \partial\Omega$. Inoltre $\partial\Omega$ è di misura nulla, quindi $\tilde{f}$ è integrabile. Inoltre per ogni $x \in [a,b]$, $y \to \tilde{f}(x,y)$ è continua in $[c,d] \setminus \{g_1(x), g_2(x)\}$. In particolare $y \to \tilde{f}(x,y)$ è integrabile su $[c,d]$. Dal Teorema di riduzione seguono allora l'esistenza dell'integrale della funzione $x \to \int_c^d f(x,y)dy = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dy$ su $[a,b]$ e la seguente uguaglianza

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{h_1(x)}^{h_2(d)} f(x,y)dy)dx.$$

Per enunciare il teorema di riduzione in più variabili introduciamo la seguente notazione. Sia $Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un ipercubo di $\mathbb{R}^n$. Rappresentiamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, $p + q = n$ e $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$. Siano poi I_p e I_q due ipercubi rispettivamente considerati in $\mathbb{R}^p$ e $\mathbb{R}^p$ tali che $Q = I_p \times I_q$.

Teorema 1.7. *Sia* Q *un ipercubo di* $\mathbb{R}^n$ *limitato. Se* $f : Q \to \mathbb{R}$ *è integrabile e per ogni* $x \in I_p$ *la funzione* $y \to f(x,y)$ *è integrabile su* I_q*, allora la funzione* $x \to \int_{I_q} f(x,y)dy$ *è integrabile su* I_p *e:*

$$\int_Q f(x,y)dxdy = \int_{I_p} (\int_{I_q} f(x,y)dy)dx.$$

Definizione 1.5. *Sia* Ω *un insieme limitato di* $\mathbb{R}^n$*. Se* $\partial\Omega$ *è di misura nulla, allora diremo che* Ω *è misurabile e la misura dell'insieme* Ω *è l'integrale della funzione caratteristica di* Ω*, cioè*

$$\mid \Omega \mid = \int_\Omega dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ un insieme e indichiamo con $(x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ per cui $x \in \mathbb{R}^p$ e $y \in \mathbb{R}^q$. Poniamo

$$\Omega_x = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x,y) \in \Omega\}$$

e

$$\Pi_{1,2\dots p}(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}^p : \ \ \Omega_x \neq \emptyset\}.$$

Teorema 1.8. *Sia Ω un insieme limitato misurabile di $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che $f:\Omega\to\mathbb{R}$ sia continua e limitata su Ω. Se $\Pi_{1,2\dots p}$ è misurabile in $\mathbb{R}^p$, per ogni $x\in\Pi_{1,2\dots p}$, Ω_x è misurabile in $\mathbb{R}^q$ e la funzione $y\to f(x,y)$ è integrabile su Ω_x, allora la funzione $x\to\int_{\Omega_x} f(x,y)dy$ è integrabile su $\Pi_{1,2\dots p}$ e:*

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy=\int_{\Pi_{1,2\dots p}(\Omega)}(\int_{\Omega_x} f(x,y)dy)dx.$$

In $\mathbb{R}^3$ si definisce dominio $z-$normale ogni insieme Ω per cui esistono un dominio semplice di $S\subset\mathbb{R}^2$ e due funzioni continue $h_1,h_2:S\to\mathbb{R}$ tali che

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ h_1(x,y)\le z\le h_2(x,y),\ (x,y)\in S\}.$$

In particolare $\Omega_{x,y}=[h_1(x,y),h_2(x,y)]$ e $\Pi_{1,2}(\Omega)=S$. Ovviamente avremo i casi analoghi di dominio x-normale e $y-$normale quando al posto di z abbiamo rispettivamente x e y.

D'altra parte, posto $z_m=\min_S h_1$ e $z_M=\max_S h_2$, se per ogni $z\in[z_m,z_M]$ l'insieme Ω_z è semplice in $\mathbb{R}^2$ avremo $\Pi_3(\Omega)=[z_m,z_M]$

Esempi.

Siano

$$B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{49}+y^2+z^2\le 4, z\ge-\sqrt{\frac{x^2}{49}+y^2}\right\}$$

e $f\in C(B;\mathbb{R})$. Determinare $a,b\in\mathbb{R}$, $B(z)\subset\mathbb{R}^2$, tali che

$$\int\int\int_B f(x,y,z)\ dxdydz=\int_a^b\left(\int\int_{B(z)} f(x,y,z)\ dxdy\right)\ dz.$$

Se fissiamo z avremo

$$B_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{49}+y^2\le 4-z^2, z\ge-\sqrt{\frac{x^2}{49}+y^2}\right\}.$$

Quindi affinché B_z non sia vuoto deve essere $4-z^2\ge 0$. Pertanto $\Pi_3(B)\subset[-2,2]$. D'altra parte se $z\in[0,2]$ abbiamo che $z\ge-\sqrt{\frac{x^2}{49}+y^2}$ è soddisfatta per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e quindi $B_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{49}+y^2\le 4-z^2\right\}$, mentre se $z\in[-2,0]$ da $\sqrt{\frac{x^2}{49}+y^2}\ge -z$, ovvero $\frac{x^2}{49}+y^2\ge z^2$ e $z\in[-2,0]$, segue che

$$B_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{49}+y^2\le 4-z^2,\ \frac{x^2}{49}+y^2\ge z^2\right\}.$$

Quindi B_z non sarà vuoto se $4-z^2>z^2,\ z\in[-2,0]$. Risolvendo il sistema otteniamo che per per $z\in[-\sqrt{2},0]$, $B_z\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:z^2\le\frac{x^2}{49}+y^2\le 4-z^2\right\}$. Altrimenti se $z\in[-2,-\sqrt{2}]$ avremo $B_z=\emptyset$. Quindi $\Pi_3(B)=[a,b]=[-\sqrt{2},2]$.

Inoltre se $z\in[-\sqrt{2},0]$ allora

$$B_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:z^2\le\frac{x^2}{49}+y^2\le 4-z^2\right\}.$$

Mentre se $z\in[0,2]$, allora

$$B_z=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{49}+y^2\le 4-z^2\right\}.$$

Risolviamo il precedente esercizio proiettando sul piano x, y, ovvero determinando $\Pi_{1,2}(B)$ e $B_{x,y}$. In questo caso per ogni $(x, y) \in \Pi_{1,2}(B)$ fissato

$$B_{x,y} = \{z \in \mathbb{R} : \ z \in [-\sqrt{4 - (\frac{x^2}{49} + y^2)}, \sqrt{4 - (\frac{x^2}{49} + y^2)}], \ \ z \geq -\sqrt{\frac{x^2}{49} + y^2}\}.$$

Quindi $B_{x,y} \neq \emptyset$ se $\frac{x^2}{49} + y^2 \leq 4$, ovvero $\Pi_{1,2}(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{49} + y^2 \leq 4\}$. In particolare se $-\sqrt{4 - (\frac{x^2}{49} + y^2)} \geq -\sqrt{\frac{x^2}{49} + y^2}$, cioè se

$$\frac{x^2}{49} + y^2 \geq 2,$$

allora

$$B_{x,y} = [-\sqrt{4 - (\frac{x^2}{49} + y^2)}, \sqrt{4 - (\frac{x^2}{49} + y^2)}];$$

mentre se

$$\frac{x^2}{49} + y^2 < 2,$$

allora

$$B_{x,y} = [-\sqrt{\frac{x^2}{49} + y^2}, \sqrt{4 - (\frac{x^2}{49} + y^2)}].$$

In questa seconda riduzione abbiamo verificato che il dominio B è z normale.