Testo e soluzioni degli esercizi contenuti nella prima prova parziale di Analisi Matematica L-B per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio A.A. 2007/2008 (Prof. F. Ferrari)

[3 punti] Trovare le soluzioni dell'equazione algebrica in $\mathbb{C}$

$$(z^2 - (2+3\mathrm{i})\mathrm{z} + 6\mathrm{i})\left(\mathrm{z}^5 + 2 - 3\mathrm{i}\right) = 0.$$

R.:

$$z_k = \sqrt[10]{13}e^{\frac{\mathrm{i}}{5}((2k+1)\pi - \arctan\frac{3}{2})},\ k = 0,1,2,3,4; z_4 = 2, z_5 = 3\mathrm{i}.$$

[5 punti] Calcolare l'integrale

$$\int_A \frac{y}{x+2y^2} dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2(9-y^2) \le x \le 4(9-y^2),\ y \ge 0\}.$$

$$\int_0^3 y\log\left(\frac{18-y^2}{9}\right)\ dy = -\int_0^3 2y\log 3\ dy + \int_0^3 y\log\left(18-y^2\right)\ dy =$$

$$= -9\log 3 + \left[\frac{1}{2}y^2\log\left(18-y^2\right)\right]_0^3 + \int_0^3 \frac{y^3}{18-y^2}\ dy =$$

$$= -\int_0^3\left(3 + \frac{18y}{y^2-18}\ dy\right) = -\frac{9}{2} + 9\log 2\,.$$

[3 punti] Siano $g, h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$p(x,y) = g(2x + 3\text{ sen }(xy), h(x,y)).$$

Calcolare $\nabla p(x_0, y_0)$, dove $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soluzione: posto $(u_0, v_0) = (2x_0 + 3\text{ sen }(x_0y_0), h(x_0, y_0))$

$$\frac{\partial p(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial g(u_0,v_0)}{\partial u}(2 + 3y_0\cos(x_0y_0)) + \frac{\partial g(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial p(x_0,y_0)}{\partial y} = 3x_0\cos(x_0y_0)\frac{\partial g(u_0,v_0)}{\partial u} + \frac{\partial g(u_0,v_0)}{\partial v}\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

[4 punti] Calcolare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y' = 3 + \cos(3x).$$

R:

$$LV_2 = \text{span}\{1, e^{-2x}\} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{13}\left(\frac{2}{3}\sin(3x) - \cos(3x)\right)$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO Il candidato svolga il seguente esercizio su di un foglio separato, motivando con cura ogni affermazione. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = & \frac{x}{y}\left(y^2+9\right)\ , \\ x(0) = & -2\ , \end{cases}$$

specificando il dominio massimale della soluzione. R.: la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e

$$y(x) = -\sqrt{-9 + 13e^{x^2}}$$