1 $\qquad \alpha \in \mathbb{R}^+ \qquad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$ (1)

$$\frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))} \in C(]0,+\infty[,\mathbb{R}) \quad \text{per ogni } \alpha>0.$$

Quindi $\dfrac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}$ è localmente Riemann integrabile.

Studiamo la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$

$$\frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))} \geq 0 \quad \text{per ogni } 0<x\leq 1, \text{ perché } 0<x^\alpha\leq 1,$$

se $x\in]0,1]$, e $\sin(x^\alpha)\in[0,\sin(1)]$ se $0\leq x^\alpha\leq 1$.

Inoltre

$$\frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))} \sim \frac{x^\alpha}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))} \quad \text{per } x\to 0^+$$

Quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$ convergerà se e solo se $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$ sarà convergente. Ora utilizzando il criterio del confronto si ha:

$$\frac{x^\alpha}{4x^8} \leq \frac{x^\alpha}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))} \leq \frac{x^\alpha}{2x^8},$$

perché $1\leq\cos(x^{-4\alpha})\leq 1$.

Pertanto $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$ convergerà se e solo se sarà convergente $\int_0^1 \frac{1}{x^{8-\alpha}}\,dx$, cioè se e solo se (per $\alpha>0$) $8-\alpha<1$ ovvero se $\alpha>7$.

Studiamo ora la convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$

Non possiamo applicare direttamente i criteri di convergenza a $\frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}$, perché non si tratta di una funzione definitivamente con segno.

Studiamo allora la convergenza assoluta dell'integrale generalizzato.

Dal criterio del confronto risulta:

$$\frac{|\sin(x^\alpha)|}{|x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))|} \le \frac{1}{x^8\,|3+\cos(x^{-4\alpha})|}$$

$$\le \frac{1}{2x^8}.$$

Quindi, poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^8}\,dx$ è convergente, allora la funzione $\dfrac{\sin x^\alpha}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}$ è assolutamente integrabile in s.g. su $[1,+\infty[$.

Pertanto $$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$$ è convergente.

per ogni $\alpha>0$.

Possiamo allora concludere che ~~anche~~

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^8(3+\cos(x^{-4\alpha}))}\,dx$$

converge per ogni $\alpha>7$.

\# 2. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{10}} \frac{\sin(5x)}{\sqrt{4-\cos^2(5x)}}\,dx$. Integriamo con un cambiamento di variabile ponendo $t=\cos(5x)$.

Allora
$$-\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{10}} \frac{(-5)\sin(5x)}{\sqrt{4-\cos^2(5x)}}\,dx = -\frac{1}{5}\int_1^{\cos\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}}$$

perché $dt=-5\sin(5x)\,dx$

$$=\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\,dt = \frac{1}{10}\left[2\arcsin\frac{t}{2}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$= \frac{1}{10}\left(2\arcsin\frac{1}{2} - 2\arcsin 0\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(2\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{30}.$$

#3 Risolvere

$$\left(5z^2 + (3+16i)z - 3 + 8i\right)\left(z^4 + 2 - 3i\right) = 0$$

$$5z^2 + (3+16i)z - 3 + 8i = 0 \qquad \Delta = (3+16i)^2 - 20(-3+8i)$$

$$= 9 + 96i - 256 + 60 - 180i = -187 - 84i$$

Cerchiamo u t.c. $u^2 = -187 - 84i$ cerchiamo cioè $x+iy$ t.c. $(x+iy)^2 = -187 - 84i \iff$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -187 \\ 2xy = -84 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{42^2}{y^2} - y^2 = -187 \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} 42^2 - y^4 = -187y^2 \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 - 187y^2 - 42^2 = 0 \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 187 + \sqrt{187^2 + 4 \cdot 42^2} \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases}$$

(l'altra soluzione va scartata perché $0 < y^2 = 187 - \sqrt{187^2 + 4 \cdot 42^2} < 0$)

$$\begin{cases} y^2 = 187 + \sqrt{34969 + 7056} \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 187 + \sqrt{42025} \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 205 \\ x = -\frac{42}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{205} \\ x = -\dfrac{42}{y} \end{cases}.$$ Pertanto $x = -\dfrac{42}{\sqrt{205}} = -\dfrac{42\sqrt{205}}{205}$

e $y = \sqrt{205}$, oppure $x = \dfrac{42\sqrt{205}}{205}$ e $y = \sqrt{205}$

Sia $u = -\dfrac{42\sqrt{205}}{205} + i\sqrt{205}$, allora

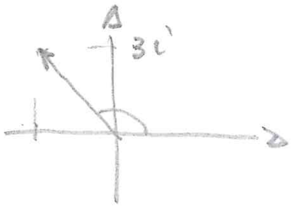
$$z = \frac{-3-16i \pm u}{10} = \begin{cases} \dfrac{-3-16i - \frac{42\sqrt{205}}{205} + i\sqrt{205}}{10} \\[2ex] \dfrac{-3-16i + \frac{42\sqrt{205}}{205} - i\sqrt{205}}{10} \end{cases}$$

Pertanto

$$z_4 = \frac{1}{10}\left(\frac{-615-42\sqrt{205}}{205} + i\left(\sqrt{205}-16\right)\right)$$

$$z_5 = \frac{1}{10}\left(\frac{-615+42\sqrt{205}}{205} - i\left(\sqrt{205}+16\right)\right).$$

Risolviamo ora $z^4 + 2 - 3i = 0 \iff z^4 = -2+3i$



$\arg(-2+3i) = -\arctan\frac{3}{2} + \pi$

$|-2+3i| = \sqrt{13}$.

Quindi posto $\varphi = -\arctan\frac{3}{2} + \pi$

$$z_k = (13)^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

4

$$3y''+10\sqrt{3}\,y'+25y=\sqrt{3}\,x^2+5+5e^{\sqrt{3}x}$$

Calcoliamo l'integrale generale dell'eq. omogenea lineare a coeff. cost.:

$$3y''+10\sqrt{3}\,y'+25y=0$$

L'eq. caratteristica associata è: $3\lambda^2+10\sqrt{3}\,\lambda+25=0$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-5\sqrt{3}\pm\sqrt{25\cdot 3-75}}{3}=-5\sqrt{3} \qquad \left(\frac{\Delta}{4}=0\right)$$

Cioè $\lambda=-5\sqrt{3}$ con molteplicità 2. Pertanto

$$V_2=\operatorname{span}\left\{e^{-5\sqrt{3}x},\ x e^{-5\sqrt{3}x}\right\}.$$

Il termine omogeneo è $f(x)=\sqrt{3}\,x^2+5+5e^{\sqrt{3}x}$. Quindi, cerchiamo una sol. di $3y''+3\sqrt{3}y'+25y=\sqrt{3}x^2$, una sol. di $3y''+3\sqrt{3}y'+25y=5$ e una sol. di $3y''+3\sqrt{3}y'+25y=5e^{\sqrt{3}x}$.
La somma di queste tre soluzioni fornirà una soluzione dell'eq. non omogenea $3y''+10\sqrt{3}y'+25y=\sqrt{3}x^2+5+5e^{\sqrt{3}x}$.
Procediamo con il metodo per simpatia. Nel caso di $\sqrt{3}x^2$ cercheremo una sol. nella forma $\varphi_1=ax^2+bx+c$:

$\varphi_1'=2ax$, $\varphi_1''=2a+b \longrightarrow 3(2a)+10\sqrt{3}\,(2ax+b)+25(ax^2+bx+c)=\sqrt{3}x^2$

$25ax^2+(25b+20\sqrt{3}a)x+6a+10\sqrt{3}b+25c=\sqrt{3}x^2$, da cui segue:

$$\begin{cases}25a=\sqrt{3}\\ 25b+20\sqrt{3}a=0\\ 6a+10\sqrt{3}b+25c=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{25}\\ b=-\frac{60}{625}=-\frac{12}{125}\\ 25c=-\frac{6\sqrt{3}}{25}+\frac{24}{25}\sqrt{3}\end{cases} \qquad \begin{cases}a=\frac{\sqrt{3}}{25}\\ b=-\frac{12}{125}\\ c=\frac{6\sqrt{3}}{625}\cdot 18=\frac{108}{625}\sqrt{3}\end{cases}$$

Quindi $\psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{25}x^2 - \frac{12}{125}x + \frac{108}{625}\sqrt{3}$

Nel caso di $f_2 = 5$ cerchiamo una sol sottoforma di una costante $\psi_2 = k$; $\psi_2' = 0$ $\psi_2'' = 0$, per cui $25k = 5$, da cui segue $k = \frac{1}{5}$ cioè $\psi_2 = \frac{1}{5}$

(N.B. il caso $f_1 + f_2 = \sqrt{3}x^2 + 5$ poteva essere trattato direttamente cercando una sol. $\overline{\psi} = Ax^2 + Bx + C$).

Infine nel caso $5e^{\sqrt{3}x}$ cercheremo una soluzione nella forma $\psi_3 = k e^{\sqrt{3}x}$, da cui segue:

$\psi_3' = k\sqrt{3}\, e^{\sqrt{3}x}$, $\psi_3'' = 3k\, e^{\sqrt{3}x}$ e $3(3ke^{\sqrt{3}x}) + 10\sqrt{3}(k\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}) + 25ke^{\sqrt{3}x} = 5e^{\sqrt{3}x}$. Quindi $9k + 30k + 25k = 5$ e $k = \frac{5}{64}$;

$\psi_3 = \frac{5}{64}e^{\sqrt{3}x}$. Finalmente l'integrale generale dell'eq. omogenea sarà:

$$LV_2 = V_2 + \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 .$$

#5 Calcolare la derivata di $f : (-2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = (x+2)^{3\sin(2x)}$; $f(x) = e^{3\sin(2x)\log(x+2)}$

$$f'(x) = e^{3\sin(2x)\log(x+2)}\left(6\cos(2x)\log(x+2) + \frac{3}{x+2}\sin(2x)\right)$$

$$= (x+2)^{3\sin(2x)}\left(6\cos(2x)\log(x+2) + \frac{3\sin(2x)}{x+2}\right)$$

In particolare

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{\pi}{12}+2\right)^{3\sin\frac{\pi}{6}}\left(6\cos\frac{\pi}{6}\log\left(\frac{\pi}{12}+2\right)+3\,\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{12}+2}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\left(\frac{24+\pi}{12}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{3}\log\left(\frac{\pi+24}{12}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{12}{\pi+24}\right)$$

$$=\left(\frac{24+\pi}{12}\right)^{3/2}\left(3\sqrt{3}\log\left(\frac{\pi+24}{12}\right)+\frac{18}{\pi+24}\right).$$

\# 6 $\quad f: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad f(x)=x^2e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}$

Se $x\neq -7$ f è derivabile perché composizione di funzioni derivabili e per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}$

$$f'(x)=2x\,e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}+x^2e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(\frac{1}{4}-\operatorname{sgn}(x+7)\right)$$

$$=x\,e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(2+x\left(\frac{1}{4}-\operatorname{sgn}(x+7)\right)\right)$$

Verifichiamo che cosa accade in -7 alla derivata prima

$$\lim_{x\to -7^-}f'(x)=-7e^{-\frac{7}{4}}\left(2-7\left(\frac{1}{4}+1\right)\right)=\frac{189}{4}e^{-\frac{7}{4}}.$$

$$\lim_{x\to -7^+}f'(x)=-7e^{-\frac{7}{4}}\left(2-7\left(\frac{1}{4}-1\right)\right)=-\frac{203}{4}e^{-\frac{7}{4}}$$

Pertanto, essendo $f\in C(\mathbb{R})$ e non esistendo $\lim_{x\to -7}f'(x)$, possiamo concludere che <u>f non è derivabile in -7</u>.

9

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{|x+7|-\frac{x}{4}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{\frac{4}{5}x+7}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{-x-7-\frac{x}{4}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-\frac{5}{4}x-7}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{e^{\frac{5}{4}t-7}}$$

$= 0$. Pertanto $y=0$ è un asintoto orizzontale.

Si osservi inoltre che $f \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, perché prodotto di funzioni positive.

Per lo studio della monotonia risolviamo $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-7\} \end{cases} \longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x\left(2 + x\left(\frac{1}{4} - \operatorname{sgn}(x+7)\right)\right) > 0 \\ x \in \mathbb{R}\setminus\{-7\} \end{cases}$$

sgn $x+7$: $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ $-$ (−1) | -7 | $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ $+$ (1)

$$\begin{cases} x\left(2 + x\left(\frac{1}{4}+1\right)\right) > 0 \\ x < -7 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x\left(2 + x\left(\frac{1}{4}-1\right)\right) > 0 \\ x > -7 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

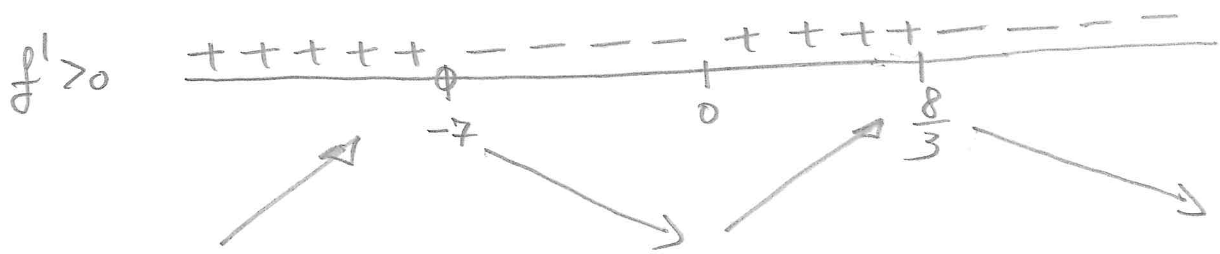
$$\begin{cases} x < -\frac{8}{5} \ \vee\ x > 0 \\ x < -7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(2 - \frac{3}{4}x\right) > 0 \\ x > -7 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$S_1 =]-\infty, -7[\qquad \begin{cases} 0 < x < \frac{8}{3} \\ x > -7 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$S_2 =]0, \tfrac{8}{3}[$$



La funzione f è monotona crescente in $]-\infty, -7]$ e in $[0, \frac{8}{3}]$ nei singoli intervalli

La funzione f è monotona decrescente in $[-7, 0]$ e in $[\frac{8}{3}, +\infty[$ nei singoli intervalli.

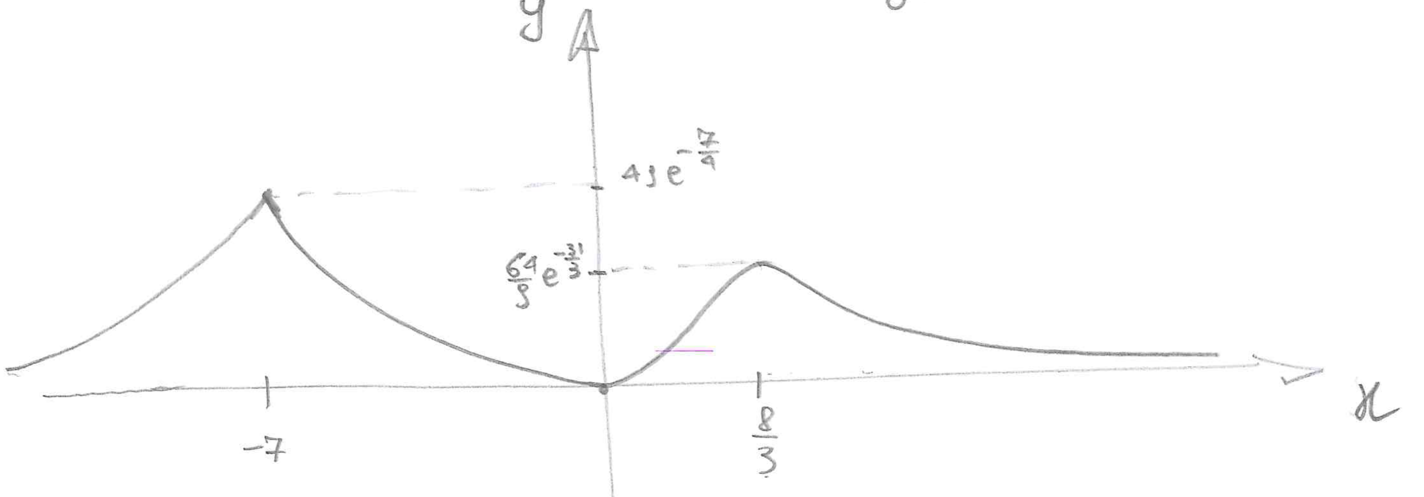
-7 è punto di massimo locale per f (-7 è p.to angoloso)

$\frac{8}{3}$ è punto di massimo locale per f

0 è punto di minimo locale per f (0 è p.to di minimo assoluto)

Un grafico qualitativo è il seguente: $f(-7) = 49 e^{-\frac{7}{4}}$; $f(\frac{8}{3}) = \frac{64}{9} e^{-\frac{31}{3}}$

$f(0) = 0$



Inoltre in -7 si realizza un massimo assoluto di f, mentre in 0 si realizza un minimo assoluto di f

Volendo calcolare la convessità/concavità sugli intervalli (non richiesto in questo esercizio) calcoliamo la f'' in $\mathbb{R}\setminus\{-7\}$.

(11)

$$f''(x) = e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(2+x\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)\right)+xe^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(2+x\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)\right)\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)$$

$$+xe^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)$$

$$=e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(2+x\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)+3x\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)+x^2\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)^2\right)$$

$$=e^{-|x+7|+\frac{x}{4}}\left(x^2\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)^2+4x\left(\frac{1}{4}-\mathrm{sgn}(x+7)\right)+2\right)$$

Pertanto $\begin{cases} f''(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{7\}\end{cases} \iff \begin{cases} x^2\left(\frac{1}{4}+1\right)^2+4x\left(\frac{1}{4}+1\right)+2>0 \\ x<-7\end{cases} \vee \begin{cases}\frac{9}{16}x^2-3x+2>0 \\ x>-7\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}\frac{25x^2}{16}+5x+2>0 \\ x<-7\end{cases} \vee \begin{cases}\frac{9}{16}x^2-3x+2>0 \\ x>-7\end{cases}$$

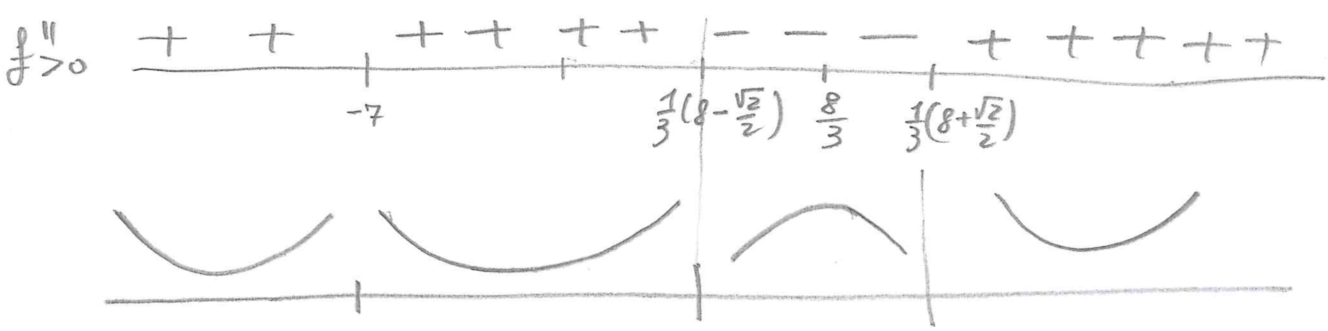
$\Delta = 25-\frac{25}{2}=\frac{25}{2}$

$\begin{cases} x<\frac{8}{25}\left(-5-\sqrt{\frac{25}{2}}\right) \vee x>\frac{8}{25}\left(-5+\sqrt{\frac{25}{2}}\right) \\ x<-7\end{cases}$

$\Delta = 9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

$\begin{cases} x<\frac{1}{3}\left(8-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \vee x>\frac{1}{3}\left(8+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ x>-7\end{cases}$

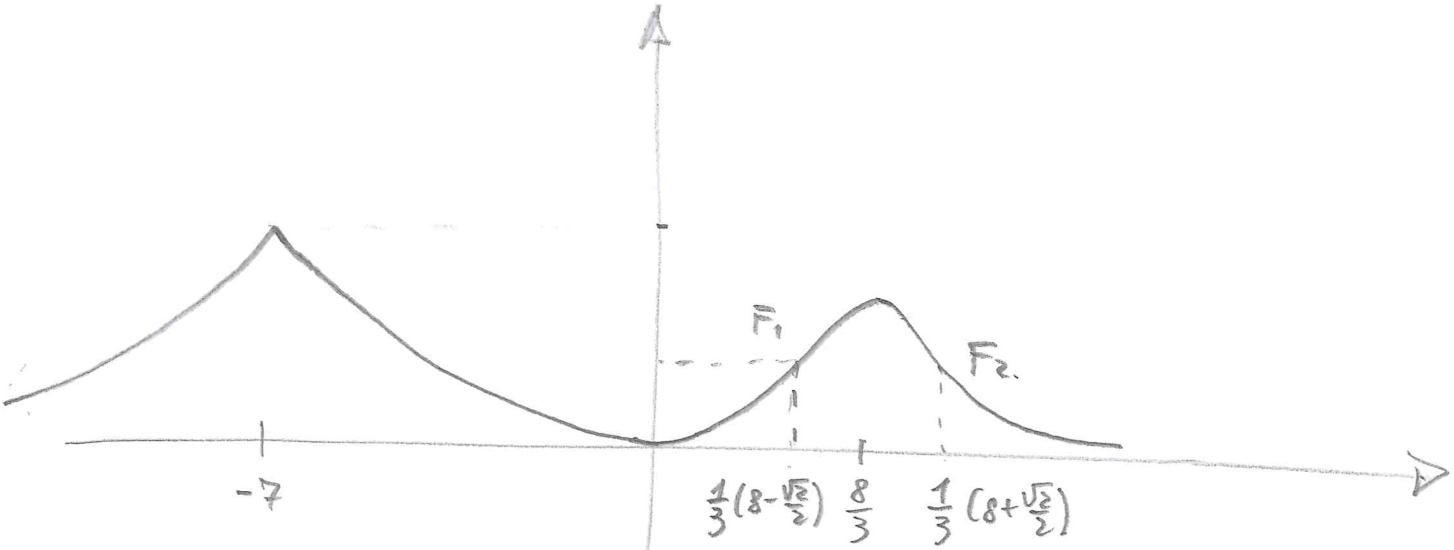
$S_1 =]-\infty,-7[$ $\vee$ $S_2 = \left]-7,\frac{1}{3}\left(8-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right[\cup \left]\frac{1}{3}\left(8+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),+\infty\right[$



Pertanto in $\frac{1}{3}\left(8-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\frac{1}{3}\left(8+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ la funzione realizza i seguenti punti di flesso

$$\left(\frac{1}{3}\left(8-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{129-16\sqrt{2}}{18}e^{-9+\frac{\sqrt{2}}{8}}\right); \left(\frac{1}{3}\left(8+\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{129+16\sqrt{2}}{18}e^{-9-\frac{\sqrt{2}}{8}}\right)$$

e il grafico è pertanto



f è convessa in $]-\infty,-7]$
f è convessa in $\left[-7, \frac{1}{3}\left(8-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
f è concava in $\left[\frac{1}{3}\left(8-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \frac{1}{3}\left(8+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$
f è convessa in $\left[\frac{1}{3}\left(8+\frac{\sqrt{2}}{2}\right), +\infty\right[$.

13

#7 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{625n^{26}\log(1+n^{-25})+20n^5e^{-5n}}{36n+15n^5e^{-5n}} = \frac{625}{36}$$

$\log(1+n^{-25}) \sim \frac{1}{n^{25}}$ per $n\to+\infty$

$N \sim 625n^{26}\frac{1}{n^{25}} \sim 625n$, $n\to+\infty$

$D \sim 36n$, $n\to+\infty$ perché $n^5\cdot e^{-5n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Quindi $\frac{N}{D} \sim \frac{625}{36}$, $n\to+\infty$

#8 Calcolare $$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(2x+5x^3)-2x}{\cosh(2x+5x^3)(\tan(5x)-\sin(5x))}$$

$\sinh(2x+5x^3) \sim 2x+5x^3-\frac{1}{6}8x^3+o(x^3)$, $x\to 0$

$\tan(5x) \sim 5x+\frac{1}{3}(5x)^3+o(x^4)$, $x\to 0$

$\sin(5x) \sim 5x-\frac{1}{6}(5x)^3+o(x^4)$, $x\to 0$

$N \sim \cancel{2x}+5x^3-\frac{4}{3}x^3-\cancel{2x}+o(x^3) \sim \frac{11}{3}x^3$, $x\to 0$

$D \sim 5x+\frac{125}{3}x^3-5x+\frac{125}{6}x^3+o(x^4) \sim \frac{375}{6}x^3$, $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{N}{D} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{11}{3}x^3}{\frac{375}{6}x^3} = \frac{6}{375}\cdot\frac{11}{3} = \frac{22}{375}$$