Correzione della prova parziale del 13/11/2009

\#1

$$\left(z^4+6-5i\right)\left(z^2-(11-i)z+30-6i\right)=0 \qquad z\in\mathbb{C}$$

$z^4+6-5i=0 \iff z^4=-6+5i$; $|-6+5i|=\sqrt{36+25}=\sqrt{61}$

$\arg(-6+5i)=-\arctan\left(\frac{5}{6}\right)+\pi$; poniamo $\theta=-\arctan\left(\frac{5}{6}\right)+\pi$.

Dobbiamo risolvere $z^4=\sqrt{61}\,e^{i\theta}$:

$z_k=(61)^{1/8}e^{i\theta_k}$, con $\theta_k=\dfrac{\theta+2k\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$.

Risolviamo ora $z^2-(11-i)z+30-6i=0$ scomponendo il polinomio si ha

$\left(z-(5-i)\right)(z-6)=0$, da cui $z=5-i$ e $z=6$.

Altrimenti $z_{4,5}=\dfrac{11-i\pm u}{2}$, dove u è una soluzione di

$u^2=\Delta$ cioè $u^2=(11-i)^2-4(30-6i)$. Pertanto

$u^2=121-22i-1-120+24i$; $u^2=2i$ $|2i|=2$ e

$\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$, quindi $u^2=2e^{\frac{\pi}{2}i}$ $u_k=\sqrt{2}\,e^{i\theta_k}$

con $\theta_k=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}$, $k=0,1$ $\theta_0=\frac{\pi}{4}$ $\theta_1=\frac{5}{4}\pi$

$u_0=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$ $(u_1=-u_0)$.

Infine $z_{4,5}=\dfrac{11-i\pm(1+i)}{2}=\begin{cases}\dfrac{11-i+1+i}{2}=6\\[2mm] \dfrac{11-i-1-i}{2}=5-i.\end{cases}$

\#2

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile, tale che $g'(5)=3$, $g'(1)=4$ e $g'(0)=1$

posto $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=g(x^2+4x)$ dire quali

delle seguenti aff. è vera

$\boxed{a}$ $h'(1)=12$; $\boxed{b}$ $h'(1)=18$; $\boxed{c}$ $h'(1)=24$; $\boxed{d}$ $h'(0)=1$.

Calcoliamo $h'(x) = g'(x^2+4x)\cdot(2x+4)$. Quindi

$h'(0) = g'(0)\cdot 4$ e $h'(1) = g'(5)\cdot 6$, ma $g'(5)=3$,
quindi $h'(1) = 3\cdot 6 = 18$. D'altra parte $h'(0) = 1\cdot 4 = 4$
Pertanto l'unica risposta esatta è la $\boxed{b}$.

#3

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n + 5\cdot n! + n^6}{2\cdot 5^n - 2\cdot n! + n^2}$$

$N \sim 5\cdot n!$ per $n\to+\infty$, $D \sim -2n!$ per $n\to+\infty$

Quindi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+5\cdot n!+n^6}{2\cdot 5^n-2\cdot n!+n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n!}{-2n!} = -\frac{5}{2}$.

#4 Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-2x+4}}{(x-6)(x^2-5x+6)}$

$$\frac{\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-2x+4}}{(x-6)(x^2-5x+6)} = \frac{\cancel{x^2}-3x+6-\cancel{x^2}+2x-4}{(x-6)(x^2-5x+6)\left(\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-2x+4}\right)}$$

$$= \frac{-x+2}{(x-6)(x-3)(x-2)\left(\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-2x+4}\right)} = -\frac{\cancel{x-2}}{(x-6)(x-3)\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-2x+4}\right)}$$

$$= -\frac{1}{(x-6)(x-3)\left(\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-2x+4}\right)}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{x^2-2x+4}}{(x-6)(x^2-5x+6)} = \lim_{x\to 2} -\frac{1}{(x-6)(x-3)\left(\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-2x+4}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4(2+2)} = -\frac{1}{16}.$$

#5 $\quad f(x) = \begin{cases} x^2-25 & \text{se } x \neq 0 \\ \frac{25}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad f : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$

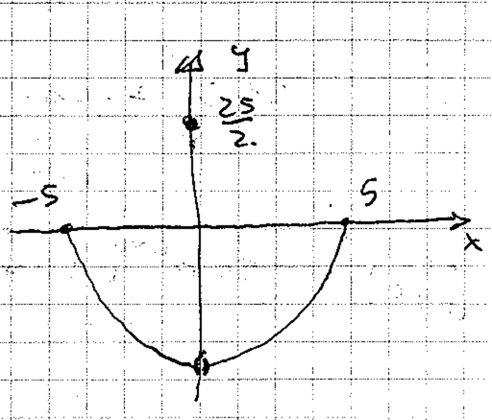
Dire quale delle seguenti affermazioni è vera e determinare poi l'immagine di f

$\boxed{a}$ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \frac{25}{2}$

$\boxed{\cancel{b}}$ non esiste $\min_{[-5,5]} f$

$\boxed{c}$ 0 è punto di minimo per f

$\boxed{d}$ non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.



(a) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, allora $f(a_n) = -25$, quindi la $\boxed{a}$ è sbagliata.

($\cancel{b}$) Posto $\tilde{f} : [-5,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \tilde{f}(x) = x^2-25$ risulta $\tilde{f}(x) = f(x)$ per ogni $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$. Ebbene $\tilde{f}$ ha un solo punto di minimo: $x=0$. Pertanto f non ha punti di minimo per $x \neq 0$. D'altra parte per $x=0$ $\quad f(0) = \frac{25}{2}$, quindi 0 non può essere punto di minimo per f perché $\lim_{x\to 0} f = -25$. Quindi esiste V intorno di 0 t.c. $-\frac{25}{2} < f(x) \leq -25$. Possiamo concludere che f non ha minimo e la risposta $\boxed{b}$ è esatta

(c) 0 è punto di minimo per f: sbagliata (vedi motivazione precedente).

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -25$ perché per ogni $a_n \to 0$ $\quad a_n \neq 0$

$$f(a_n) = a_n^2 - 25 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -25 .$$ Quindi esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$

e pertanto la risposta $\boxed{d}$ è sbagliata.

Inoltre
$$f([-5,5]) = (-25, 0] \cup \left\{\frac{25}{2}\right\}.$$

Infatti $\tilde{f}([-5,5]) = [-25, 0]$, quindi $f([-5,0)\cup(0,5])$
$= \tilde{f}([-5,5]) \setminus \{\tilde{f}(0)\}$ $\quad$ (ricordiamo $f(x) = \tilde{f}(x)$ se $x \neq 0$) cioè $f([-5,0)\cup(0,5]) = (-25, 0]$. Quindi:

$$\tilde f([-5,5]) = \tilde f([-5,0) \cup (0,5]) \cup \{f(0)\} = (-25,0] \cup \left\{\frac{25}{2}\right\}.$$

#6 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \dfrac{e \;\; + \sin(4x)}{\sqrt{x^2+x+5}}$

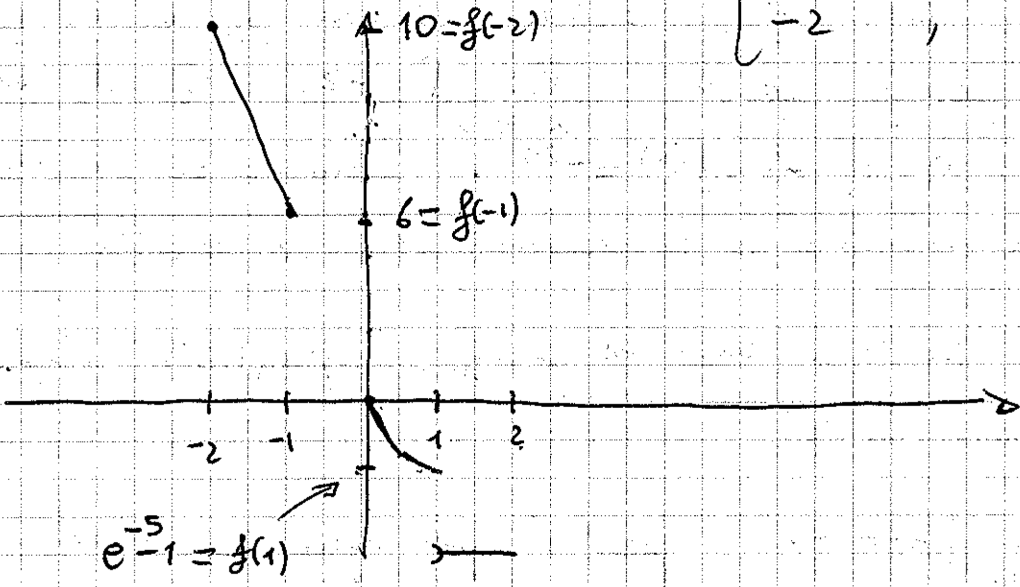
Calcolare (i) $f'(c)$ con $c \in \mathbb{R}$ (ii) $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$f'(x) = \frac{\left(2x e^{x^2+4} + 4\cos(4x)\right)\sqrt{x^2+x+5} - \left(e^{x^2+4} + \sin(4x)\right)\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+5}}}{(x^2+x+5)}$$

$$f'(c) = \frac{\left(2c e^{c^2+4} + 4\cos(4c)\right)\sqrt{c^2+c+5} - \left(e^{c^2+4} + \sin(4c)\right)\dfrac{2c+1}{2\sqrt{c^2+c+5}}}{c^2+c+5}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\left(\frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi^2}{16}+4} - 4\right)\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}+5} - e^{\frac{\pi^2}{16}+4}\,\frac{\frac{\pi}{2}+1}{2\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}+5}}\right]\frac{1}{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}+5}$$

#7 $\quad f: [-2,-1] \cup [0,2[\;\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2-4x, & -2 \le x \le -1 \\ e^{-5x}-1, & 0 \le x \le 1 \\ -2, & 1 < x < 2 \end{cases}$



$f|_{[-2,-1]} = 2-4x$ è continua, perché ogni polinomio è continuo

$f|_{[0,1[} = e^{-5x}-1$ è continua, perché somma di funzioni continue

$f|_{]1,2[} = 2$ è continua, perché le funzioni costanti sono continue

Rimane da esaminare il punto 1. Per ogni $\{a_n\} \subset [0,1[$
$a_n \to 1$ $f(a_n) = e^{-5a_n} - 1 \to e^{-5} - 1$ perché $e^{-5x} - 1$ è continua su $[0,1]$. Pertanto $\lim_{x \to 1^-} f(x) = e^{-5} - 1$.
Inoltre per ogni $\{a_n\} \subset (1,2)$, $a_n \to 1$, si ha che $f(a_n) = 2$, quindi $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$. Possiamo concludere che non esiste $\lim_{x \to 2} f(x)$ perché $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \neq e^{-5} - 1 = \lim_{x \to 1^-} f(x)$. Pertanto f non è continua in 1, mentre è continua in ogni altro punto del suo dominio.

$f_{|[-2,-1]}$ è monotona decrescente, com'è banalmente verificabile verificando la definizione.

$f_{|[0,1[}$ è monotona decrescente, perché e^{-ax} è monotona decrescente per ogni $a>0$ e $e^{-ax} - 1$ sarà ancora monotona decrescente.

$f_{|]1,2[}$ è costante.

Il dominio di f è l'unione di due intervalli. Inoltre
per ogni $x \in [1,2]$ $f(-1) \geq f(x)$. e
per ogni $x \in [0,1[$ $f(x) \geq 2$. Quindi f è monotona decrescente sul suo dominio.

Poiché f è monotona decrescente sul suo dominio
$f(-2) \geq f(x)$ per ogni $x \in [-2,-1] \cup [0,2] = D$.
Quindi esiste $\max_D f = f(-2) = 10$.