1

$$y''+y'+2y=3x+e^{-\frac{x}{2}}$$

Risolviamo $y''+y'+2y=0$ determinando l'integrale generale dell'eq. differenziale lineare omogenea. L'equazione caratteristica è $\lambda^2+\lambda+2=0$ e le soluzioni sono $\lambda_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$

Pertanto l'integrale generale dell'eq. diff. lineare omogenea è:

$$V_2=\text{Span}\left\{e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right),\ e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}.$$

Determiniamo una soluzione di $y''+y'+2y=3x$ con il metodo per simpatia. In particolare cercheremo una soluzione nella forma $ax+b$. Derivando e sostituendo otteniamo

$a+2(ax+b)=3x$, da cui segue $\begin{cases}2a=3\\a+2b=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\b=-\frac{3}{4}\end{cases}$

Quindi $\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}$ è una soluzione di $y''+y'+2y=3x$.

Analogamente cerchiamo una sol. di $y''+y'+2y=e^{-\frac{x}{2}}$ con il metodo per simpatia nella forma $Ke^{-\frac{x}{2}}$.

$+\frac{K}{4}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{K}{2}e^{-\frac{x}{2}}+2Ke^{-\frac{x}{2}}=e^{-\frac{x}{2}}$. Pertanto $\frac{K}{4}-\frac{K}{2}+2K=1$

$-\frac{K}{4}+2K=1$, $\frac{7}{4}K=1$ $K=\frac{4}{7}$. Quindi $\frac{4}{7}e^{-\frac{x}{2}}$

Poiché $y''+y'+2y=3x+e^{-\frac{x}{2}}$ è lineare l'integrale generale è

$$LV_2=\text{Span}\left\{e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right),\ e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)\right\}+\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}+\frac{4}{7}e^{-\frac{x}{2}}$$

#2

$$\int_{2}^{5} \frac{2\sqrt{x+5}+1}{(\sqrt{x+5}-5)(\sqrt{x+5}-2)\sqrt{x+5}}\,dx$$

Posto $\sqrt{x+5}=t$ $\qquad dt=\frac{1}{2\sqrt{x+5}}\,dx$

$$2\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{10}} \frac{2t+1}{(t-5)(t-2)}\,dt$$. Metodo dei fratti semplici

$$\frac{2t+1}{(t-5)(t-2)} = \frac{A}{t-5}+\frac{B}{t-2} = \frac{At-2A+Bt-5B}{(t-5)(t-2)} = \frac{(A+B)t-2A-5B}{(t-5)(t-2)}$$

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A-5B=1 \end{cases} \qquad \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -5+2=-3$$

$$A=\frac{\det\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-11}{-3}=\frac{11}{3} \ ; \quad B=\frac{\det\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+4}{-3}=-\frac{5}{3}$$

Quindi

$$2\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{10}} \frac{2t+1}{(t-5)(t-2)}\,dt = 2\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{10}} \frac{\frac{11}{3}}{t-5}\,dt + 2\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{10}} \frac{-\frac{5}{3}}{t-2}\,dt$$

$$= \frac{22}{3}\Big[\log|t-5|\Big]_{t=\sqrt{7}}^{t=\sqrt{10}} + 2\Big[-\frac{5}{3}\log|t-2|\Big]_{t=\sqrt{7}}^{t=\sqrt{10}}$$

$$= \frac{22}{3}\log\frac{5-\sqrt{10}}{5-\sqrt{7}} - \frac{10}{3}\log\frac{\sqrt{10}-2}{\sqrt{7}-2}.$$

#3

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(9x^2)-\sin(81x^4)+2x^6-9x^2+27x^4}{\cos(3\pi(x+1))\left(\cosh(4x)+\cos(4x)-2\right)} = \frac{81}{32}$$

$\sin t \sim t - \frac{t^3}{3!}$, $t\to 0$; $\cosh t \sim 1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}$, $t\to 0$

$\cos t \sim 1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4!}$, $t\to 0$.

$$N \sim \cancel{9x^2} - \frac{(9x^2)^3}{6} - 81x^4 + 2x^6 - \cancel{9x^2} + 27x^4 \sim -54x^4, \quad x\to 0$$

$$\cosh(4x)+\cos(4x)-2 \sim \cancel{1}+\cancel{8x^2}+\frac{4^4x^4}{24}+\cancel{1}-\cancel{8x^2}+\frac{4^4x^4}{24}-\cancel{2} \sim \frac{64}{3}x^4$$

$x\to 0$

$$\frac{N}{D} \sim \frac{-54x^4}{-\frac{64}{3}x^4} \sim \frac{81}{32}, \; x\to 0 \quad \left(\text{Infatti } \cos(3\pi(x+1)) \xrightarrow[x\to 0]{} -1\right).$$

#4

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha+5x^6}\,dx \qquad \alpha\in\mathbb{R}^+$$

$\frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha+5x^6} \in C((0,+\infty))$. Quindi studiamo la convergenza di

$\int_0^{1/5} \frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha+5x^6}\,dx$; in particolare $\frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha+5x^6}>0$, quindi

possiamo applicare il criterio del confronto asintotico.

In particolare

$$\frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha+5x^6} \sim \frac{5x^2}{x^\alpha+5x^6}, \quad x\to 0$$

Se $\alpha < 6$ allora $\frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha + 5x^6} \sim \frac{5x}{x^\alpha} \sim \frac{5}{x^{\alpha-2}}$, $x \to 0$

in tal caso l'integrale generalizzato $\int_0^{1/5} \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} dx$ converge

se e solo se $\alpha - 2 < 1$, ovvero $0 < \alpha < 3$, $(\alpha \in \mathbb{R}^+)$.

Se $\alpha \geq 6$ allora $\frac{\sin(5x^2)}{x^\alpha + 5x^6} \sim \frac{5x^2}{x^6} \sim \frac{5}{x^4}$, $x \to 0$

non converge $\int_0^{1/5} \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} dx$.

Esaminiamo ora $\int_{1/5}^{+\infty} \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} dx$. Poiché $\frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6}$

non è positiva (definitivamente) studiamo la convergenza assoluta, cioè la conv. di $\int_{\frac{1}{5}}^{+\infty} \left| \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} \right| dx$

$$\left| \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} \right| = \frac{|\sin(5x)^2|}{x^\alpha + 5x^6} \leq \frac{1}{x^\alpha + 5x^6} \leq \frac{1}{x^6}, \quad x \to +\infty$$

Quindi $\int_{\frac{1}{5}}^{+\infty} \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} dx$ è assolutamente convergente

e in particolare è convergente.

Pertanto

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x)^2}{x^\alpha + 5x^6} dx \text{ converge se e solo se } \alpha \in (0, 3) \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

#5

$$\begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ (z^4+2+7i)\left(z^2+(9-7i)z+14-49i\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^4+2+7i=0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \iff \begin{cases} z^4=-2-7i \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \iff \begin{cases} z^4 = 51^{\frac{1}{2}} e^{i\bar{\theta}} \\ z \in \mathbb{C} \\ \bar{\theta} = \arctan \frac{7}{2} + \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_k = 51^{\frac{1}{8}} e^{i\theta_k} \\ k=0,1,2,3 \; ; \quad \theta_k = \dfrac{\bar{\theta}+2k\pi}{4} \\ \bar{\theta} = \arctan \frac{7}{2} + \pi \end{cases}$$

Inoltre $\begin{cases} z^2+(9-7i)z+14-49i=0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \iff \begin{cases} z^2+(7+2-7i)z+14-49i=0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases}$

$$\begin{cases} (z+7)(z+2-7i)=0 \\ z \in \mathbb{C} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_4=-7 \\ z_5=-2+7i \end{cases}$$

Le soluzioni di $(z^4+2+7i)(z^2+(9-7i)z+14-49i)=0$

sono $\left\{ 51^{1/8} e^{i\theta_0}, 51^{1/8} e^{i\theta_1}, 51^{1/8} e^{i\theta_2}, 51^{1/8} e^{i\theta_3}, -7, -2+7i \right\}$.

#6

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n+2\cdot 4^{-n}+5\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^n}{5\cdot 2^n+3\cdot e^{-n}+2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^n} = \frac{1}{5}$$

$\frac{e}{2} < 2$, quindi $\dfrac{2^n+2\cdot 4^{-n}+5\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^2}{5\cdot 2^n+3\cdot e^{-n}+2\cdot\left(\frac{e}{2}\right)^n} \sim \dfrac{1}{5}$

7

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |6x-5|^{1/3} - |x|^{1/3}$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{6}, 0\right\}$ perché (ad eccezione di $\frac{5}{6}$ e 0) f è composizione di funzioni derivabili in ogni punto del proprio dominio. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$

$$f'(x) = 2\,|6x-5|^{-2/3}\,\mathrm{sgn}(6x-5) - \frac{1}{3}|x|^{-2/3}\,\mathrm{sgn}\,x.$$

Determiniamo l'insieme del dominio di f in cui $f' < 0$, cioè

$$\begin{cases} f' < 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{5}{6}\right\} \end{cases} \iff \begin{cases} |6x-5|^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{sgn}(6x-5) < \frac{1}{6}|x|^{-2/3}\,\mathrm{sgn}\,x \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{5}{6}\right\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6|x|^{2/3}\,\mathrm{sgn}(6x-5) < |6x-5|^{2/3}\,\mathrm{sgn}\,x \\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{5}{6}\right\} \end{cases}$$

<u>Se $x < 0$</u>, allora $\begin{cases} x < 0 \\ -(-x)^{2/3} \cdot 6 < -(5-6x)^{2/3} \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ (5-6x)^{3/2} < -6x \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x < 0 \\ 6\left(6^{\frac{1}{2}} - 1\right)x < -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ x < -\dfrac{5}{6^{3/2} - 6} \end{cases}$$

Pertanto f è monotona strettamente decrescente in $\left(-\infty, -\frac{5}{6^{3/2} - 6}\right)$

<u>Se $0 < x < \frac{5}{6}$</u>, allora $\begin{cases} f' < 0 \\ 0 < x < \frac{5}{6} \end{cases} \iff \begin{cases} -6(x)^{2/3} < (5-6x)^{2/3} \\ 0 < x < \frac{5}{6} \end{cases}$

$\iff 0 < x < \frac{5}{6}$. Pertanto f è monotona strettamente decrescente in $\left(0, \frac{5}{6}\right)$.

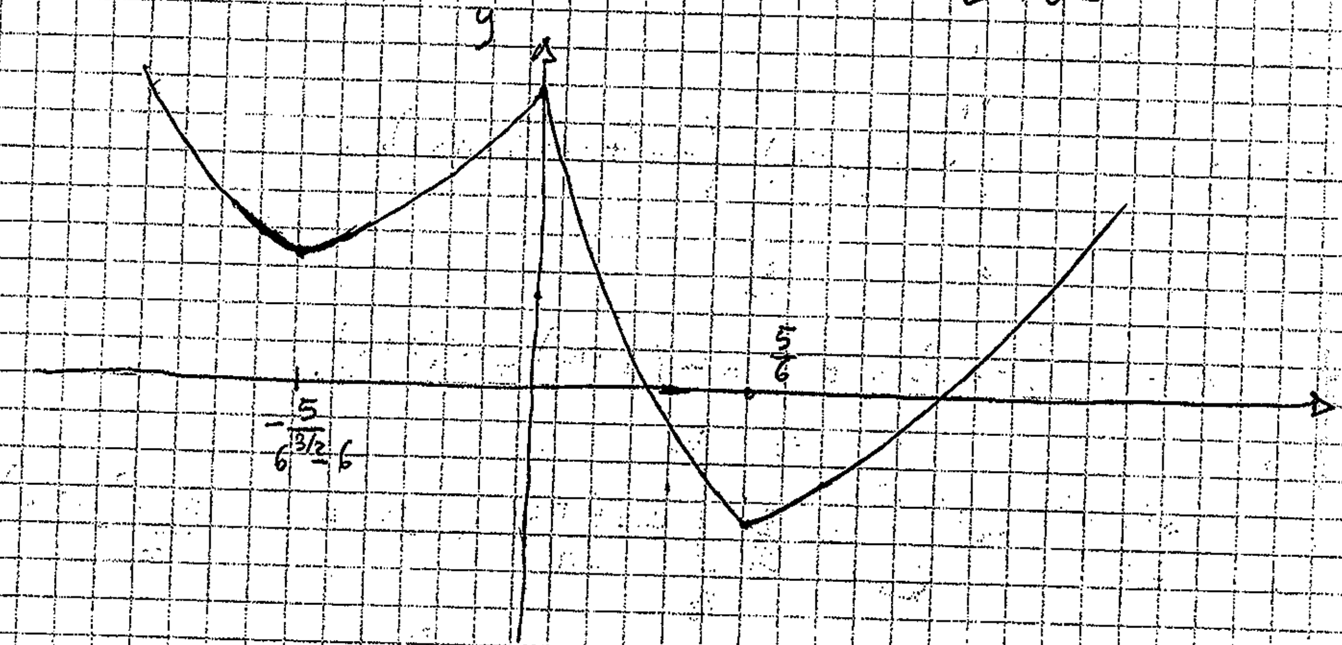
Se $x > \frac{5}{6}$, allora $\begin{cases} x > \frac{5}{6} \\ f' < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{5}{6} \\ 6\, x^{2/3} < (6x-5)^{2/3} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x > \frac{5}{6} \\ 6^{3/2}\, x < 6x - 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{5}{6} \\ 6x\left(6^{1/2} - 1\right) < -5 \end{cases} \iff S = \emptyset$$

perché $6^{1/2} > 1$ e $x > \frac{5}{6}$.

Pertanto f è strettamente decrescente su $\left(-\infty, -\frac{5}{6^{3/2}-6}\right]$

inoltre f è strettamente decrescente in $\left[0, \frac{5}{6}\right]$



$$f\left(-\frac{5}{6^{3/2}-6}\right) = \left|-\frac{5}{6^{1/2}-1} - 5\right|^{1/3} - \frac{5^{1/3}}{6^{\frac{1}{3}}\left(6^{1/2}-1\right)^{1/3}} = 5^{\frac{1}{3}}\left\{\left|\frac{1}{6^{1/2}-1} + 1\right|^{1/3} - \frac{1}{6^{1/3}\left(6^{1/2}-1\right)^{1/3}}\right.$$

$$= 5^{1/3}\left\{\left(\frac{\cancel{1} + 6^{1/2} \cancel{-1}}{6^{1/2}-1}\right)^{1/3} - \frac{1}{6^{1/3}\left(6^{1/2}-1\right)^{1/3}}\right\} = \frac{5^{1/3}}{\left(6^{1/2}-1\right)^{1/3}}\left(6^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{6^{1/3}}\right)$$

Pertanto $-\frac{5}{6^{3/2}-6}$ è p.to di minimo locale, 0 è un punto di massimo locale, $\frac{5}{6}$ è p.to di minimo locale (assoluto)

8 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g(t)=\sin(f(t^2+t))$. Quindi g è derivabile perché composizione di funzioni derivabili. Inoltre

$$g'(t)=\cos(f(t^2+t))\cdot f'(t^2+t)\,(2t+1).$$ Pertanto

$$g'(0)=\cos(f(0))\cdot f'(0)=\cos(5\pi)\cdot 2=-2$$

Quindi la risposta è $\boxed{a}$.

La seconda prova parziale era composta dagli esercizi 1, 2, 3, 4, 5 e dai seguenti

P.P. 1 $$\int_{1/2}^{3/4}\sin(4\pi x)\cdot\left(5x^2+\cos^2(4\pi x)\right)dx$$

$$=\int_{1/2}^{3/4}\sin(4\pi x)\cdot 5x^2\,dx+\int_{1/2}^{3/4}\sin(4\pi x)\cos^2(4\pi x)$$

$$=\left[-\frac{\cos(4\pi x)}{4\pi}\cdot 5x^2\right]_{x=1/2}^{x=3/4}+\frac{5}{2\pi}\int_{1/2}^{3/4}\frac{\cos(4\pi x)}{4\pi}\,x\,dx+\left[-\frac{4\pi\cos^3(4\pi x)}{3}\right]_{x=1/2}^{x=3/4}$$

$$=\frac{5\cdot\frac{9}{16}}{4\pi}-\frac{\frac{5}{4}}{4\pi}+\frac{5}{2\pi}\left\{\left[\frac{\sin(4\pi x)}{(4\pi)^2}\,x\right]_{x=1/2}^{x=3/4}-\int_{1/2}^{3/4}\frac{\sin(4\pi x)}{(4\pi)^2}\,dx\right\}-\frac{4\pi}{3}(-1-1)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{45}{16}-\frac{5}{4}\right)+\frac{5}{2\pi}\left\{+\left[\frac{\cos(4\pi x)}{(4\pi)^3}\right]_{x=1/2}^{x=3/4}\right\}+\frac{8}{3}\pi$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{45-20}{16}\right)+\frac{5}{2\pi}\left(\frac{-1}{(4\pi)^3}-\frac{1}{(4\pi)^3}\right)+\frac{8}{3}\pi$$

$$=\frac{25}{64\pi}-\frac{5}{(4\pi)^3}+\frac{8}{3}\pi$$

pp.2 Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Posto $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$F(x) = \int_2^{x^4} f(t)\,dt$. (i) Dimostrare che $F \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

(ii) Calcolare $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $F'(x)$ e $F''(x)$. (iii) Determinare la funzione f in modo che $F'' = 11x^2 f(x^4)$ e $f(16) = \frac{1}{2}$.

(i) Sapendo che $f \in C^1$, allora $F \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ per il teorema fond. sul calcolo integrale. Quindi $f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

(ii) $F'(x) = f(x^4) \cdot 4x^3$ e $F''(x) = f'(x^4)(4x^3)^2 + f(x^4)\,12x^2$

(iii) $F''(x) = 11x^2 f(x^4) \iff 16 f'(x^4)\,x^6 + 12 f(x^4)\,x^2 = 11x^2 f(x^4)$,

posto $x^4 = t \geq 0$ $\quad 16 f'(t)\, t^{\frac{3}{2}} + 1 f(t)\, t^{1/2} = 0 \iff$

$$\begin{cases} 16 f'(t)\, t + 1 f(t) = 0 \\ f(16) = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{1}{16\,t}$$

(Separazione di variabili) $\displaystyle\int_{16}^{t} \frac{f'(s)}{f(s)}\,ds = -\int_{16}^{t} \frac{1}{16\,s}\,ds$

$$\Big[\log|f(s)|\Big]_{s=16}^{s=t} = -\frac{1}{16}\Big[\log|s|\Big]_{s=16}^{s=t},$$

$\log \dfrac{|f(t)|}{|f(16)|} = -\dfrac{1}{16} \log \dfrac{t}{16}$. Quindi

$$\frac{f(t)}{f(16)} = \left(\frac{t}{16}\right)^{-\frac{1}{16}}, \qquad f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{16}\right)^{-\frac{1}{16}}$$

$$f(x^4) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{16}\right)^{-\frac{1}{16}}.$$