#1 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n2^{n+7}-2^7 n^{n-1}+n^9}{n^{n-1}+9^n+7n^9} = -2^7$$

Infatti $n2^{n+7}-2^7n^{n-1}+n^9 \sim -2^7 n^{n-1}$ per $n\to+\infty$ e
$n^{n-1}+9^n+7n^9 \sim n^{n-1}$ per $n\to+\infty$.

#2 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)-e^{\frac{3}{x}}}{\sqrt{x^2+2}}$.

$$f'(x_0)=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x_0\right)+\frac{3}{x_0^2}e^{\frac{3}{x_0}}\right)\sqrt{x_0^2+2}-\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}x_0\right)-e^{\frac{3}{x_0}}\right)\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+2}}}{(x_0^2+2)}$$

$$f'(2)=\frac{\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}e^{\frac{3}{2}}\right)\sqrt{6}+e^{\frac{3}{2}}\frac{2}{\sqrt{6}}}{6}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{\pi}{2}+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{13}{12}e^{\frac{3}{2}}\right).$$

#3

$$f:[2,3]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{se } x\in[2,3) \\ \frac{25}{4}, & \text{se } x=3\end{cases}$$

$\boxed{A}$ $\max\limits_{[2,3]} f = 9$; $\boxed{B}$ $\max\limits_{[2,3]} f=\lim\limits_{x\to3} f(x)$; $\boxed{C}$ $\max\limits_{[2,3]} f = \frac{25}{4}$; $\boxed{D}$ $\inf\limits_{[2,3]} f = 4$.

Poiché $f([2,3])=[4,9)$, possiamo concludere che f non ha massimo. Pertanto le risposte A, B, C vanno escluse.
Inoltre $\inf\limits_{[2,3)} f = \inf\{y\in\mathbb{R}: y=f(x),\ x\in[2,3)\}=\inf[4,9)=4=\min[4,9)$. Quindi $\boxed{D}$ è la risposta esatta.

#4 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$ e $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $g(x)=\exp\left(-\frac{1}{x^4}\right)$

$\boxed{A}$ $\exists \lim\limits_{x\to0} g(x)=g(0)$; $\boxed{B}$ $\nexists \lim\limits_{x\to0} g(x)$; $\boxed{C}$ $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n)=-\infty$; $\boxed{D}$ $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n)=0$

g non è definita in 0 quindi la $\boxed{A}$ è falsa; anche la $\boxed{B}$ è falsa perché esiste $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$; la $\boxed{C}$ è falsa perché $g>0$ in contraddizione con quanto affermato da $\boxed{C}$. La risposta $\boxed{D}$ è vera perché $\lim\limits_{x\to0} g(x)=0$, in particolare se $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^+$, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, allora $g(a_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (si noti che l'affermazione poteva essere provata direttamente utilizzando la def. di succ. convergente).

#5

$$\lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x^2-8x+32} - x\right)\cos(x-6)}{x^2-x-12} = -\frac{1}{7}\cos(2).$$

$\left(\sqrt{x^2-8x+32} - x\right)\cos(x-6) \xrightarrow[x\to 4]{} 0$ perché $\left(\sqrt{x^2-8x+32} - x\right)\cos(x-6)$ è continua in 4. Inoltre $x^2-x-12 \xrightarrow[x\to 4]{} 0$, perché x^2-x-32 è continua in 4. Per ogni $x \neq 4$ si ha:

$$\frac{\left(\sqrt{x^2-8x+32} - x\right)}{x^2-x-12}\cos(x-6) = \frac{x^2-8x+32-x^2}{(x^2-x-12)\left(\sqrt{x^2-8x+32}+x\right)}\cos(x-6)$$

$$= -\frac{8\cdot\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+3)\left(\sqrt{x^2-8x+32}+x\right)}\cos(x-6) = -\frac{8\cos(x-6)}{(x+3)\left(\sqrt{x^2-8x+32}+x\right)}.$$

Quindi $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{-8\cos(x-6)}{(x+3)\left(\sqrt{x^2-8x+32}+x\right)} = -\frac{1}{7}\cos(2).$

#6

$$\left(z^2+(7-6i)z-42i\right)\left(z^3+7-42i\right)=0$$

Le soluzioni sono date dalle soluzioni di $z^2+(7-6i)z-42i=0$ unione le soluzioni di $z^3+7-42i=0$. Quindi, osservando che $\left(z^2+(7-6i)z-42i\right)=(z+7)(z-6i)$, otteniamo che $z=-7$ e $z=6i$ sono soluzioni. Inoltre $z^3=-7+42i=\sqrt{49+42^2}\,e^{i\varphi}$ con $\varphi=-\arctan 6+\pi$. Quindi le soluzioni di $z^3=-7+42i$ sono

$$z_k=\left(49+42^2\right)^{1/6}e^{i\theta_k} \quad \text{con } \theta_k=\frac{\varphi+2k\pi}{3}, \quad k=0,1,2.$$