Esercizi della seconda prova parziale e del primo appello

1

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})}dx \quad , \gamma>0.$$

Studiamo $\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})}dx$. In particolare $\frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^\gamma}$,

Quindi $\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})}dx$ converge se e solo se $\gamma<1$.

Esaminiamo ora $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})}dx$. $e^{-\frac{1}{x^{1/2}}} \sim 1-\frac{1}{x^{1/2}}$ per $x\to+\infty$

Quindi $\frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})} \sim \frac{1}{x^{5\gamma+\frac{1}{2}}}$, $x\to+\infty$. Pertanto

$\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})}dx$ converge se e solo se $5\gamma+\frac{1}{2}>1$, quindi

$\gamma>\frac{1}{10}$. Infine $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-\frac{1}{x^{1/2}}}}{x^\gamma(1+x^{4\gamma})}dx$ converge se e solo se

$\gamma\in\left(\frac{1}{10},1\right)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{4xe^{4x+3x^2}-16x^2-\sin(4x+12x^3)}{\tan(3+4x)\left(\sinh(3x)-\sin(3x)\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{128}{3}x^3}{9\,tg(3)x^3} = \frac{128}{27\,tg 3}$$

Infatti:

$e^{4x+3x^2} \sim 1+4x+3x^2+\frac{1}{2}(4x)^2+o(x^2)$, $x\to 0$.

$\sin(4x+12x^3) \sim 4x+12x^3-\frac{1}{6}(4x)^3+o(x^3)$, $x\to 0$.

$\sinh(3x) \sim 3x+\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)$, $x\to 0$

$\sin(3x) \sim 3x-\frac{(3x)^3}{6}+o(x^3)$, $x\to 0$

$N \sim 4x(1+4x+3x^2+8x^2)-16x^2-(4x+12x^3-\frac{32}{3}x^3) \sim \frac{128}{3}x^3$, $x\to 0$

$D \sim tg 3\left(3x+\frac{(3x)^3}{6}-3x+\frac{(3x)^3}{6}\right) \sim 9\,tg(3)\,x^3$.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-6|(x+3)e^{x}$. $f\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{6\})\cap C(\mathbb{R})$

Quindi se $x\in\mathbb{R}\setminus\{6\}$, $f'(x)=\mathrm{sgn}(x-6)\cdot(x+3)e^{x}+|x-6|\left(e^{x}+(x+3)e^{x}\right)$

$=\mathrm{sgn}(x-6)\left((x+3)+(x-6)(x+4)\right)e^{x}$. Studiamo il segno di f'.

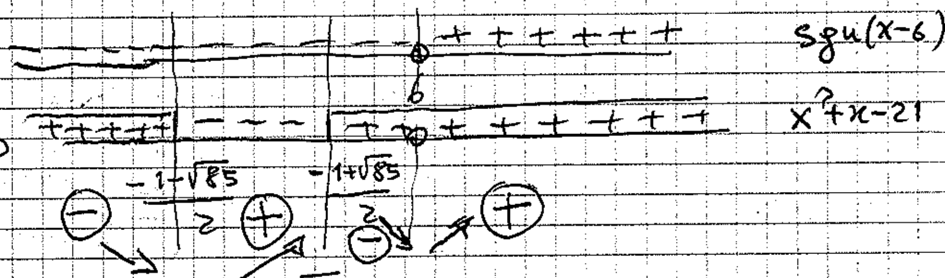
$$\begin{cases} f'>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{6\}\end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{sgn}(x-6)\left(x+3+x^2-2x-24\right)e^{x}>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{6\}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x-6)\left(x^2+x-21\right)e^{x}>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus 6\end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{sgn}(x-6)(x^2+x-21)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{6\}.\end{cases}$$

Studiamo il segno di $x^2+x-21>0 \iff x\in\left(\frac{-1+\sqrt{85}}{2},+\infty\right)\cup\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{85}}{2}\right)$

Quindi

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x-6)(x^2+x-21)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{6\}\end{cases} \iff$$



$\frac{-1+9}{2}<\frac{-1+\sqrt{85}}{2}<\frac{-1+10}{2}$ e $\frac{-1-10}{2}<\frac{-1-\sqrt{85}}{2}<\frac{-1-9}{2}$

$4<\frac{-1+\sqrt{85}}{2}<\frac{9}{2}$ e $-\frac{11}{2}<\frac{-1-\sqrt{85}}{2}<-5$.

Pertanto la funzione è monotona crescente in $\left[\frac{-1-\sqrt{85}}{2},\frac{-1+\sqrt{85}}{2}\right]$ e monotona crescente in $[6,+\infty)$. Inoltre $\frac{-1-\sqrt{85}}{2}$ è p.to di minimo relativo, 6 è p.to di minimo relativo mentre $\frac{-1+\sqrt{85}}{2}$ è p.to di max relativo.

$y''-9y'+20y=4e^{5x}+\sin(4x)$. Risolviamo l'equazione omogenea associata $y''-9y'+20y=0$. L'eq. caratteristica è $\lambda^2-9\lambda+20=0$

$(\lambda-4)(\lambda-5)=0$, quindi $\lambda=4$ e $\lambda=5$ sono le soluzioni.

$V_2=\mathrm{span}\{e^{4x},e^{5x}\}$.

Calcoliamo una soluzione di $y''-9y'+20y=4e^{5x}$. Poiché 5 è soluzione dell'eq. $\lambda^2-9\lambda+20=0$ cerchiamo una soluzione nella forma Kxe^{5x}. Posto $\varphi=Kxe^{5x}$ avremo:

$$\varphi'=Ke^{5x}+5Kxe^{5x},\quad \varphi''=5Ke^{5x}+5Ke^{5x}+25Kxe^{5x}.$$ Sostituendo

$$5Ke^{5x}+5Ke^{5x}+25Kxe^{5x}-9\left(Ke^{5x}+5Kxe^{5x}\right)+20Kxe^{5x}=4e^{5x}$$

$$K\cancel{e^{5x}}=4\cancel{e^{5x}}$$ da cui $K=4$. Pertanto $\varphi=4xe^{5x}$.

Analogamente cerchiamo una soluzione di $y''-9y'+20y=\sin(4x)$ poiché $\pm i4$ non è soluzione di $\lambda^2-9\lambda+20=0$ cercheremo una soluzione φ nella forma $A\cos(4x)+B\sin(4x)$.

Pertanto:

$$\varphi'=-4A\sin(4x)+4B\cos(4x)\ ;\ \varphi''=-16A\cos(4x)-4^2B\sin(4x)$$

e sostituendo nell'eq. diff. otteniamo

$$-16A\cos(4x)-4^2B\sin(4x)-9\left(-4A\sin(4x)+4B\cos(4x)\right)+20\left(A\cos(4x)+B\sin(4x)\right)=\sin(4x)$$

$$\left(-4^2B+36A+20B-1\right)\sin(4x)+\left(-16A-36B+20A\right)\cos(4x)=0$$

Richiediamo quindi che $\begin{cases}36A+4B=1\\ 4A-36B=0\end{cases}$ $\begin{cases}36A+4B=1\\ A-9B=0\end{cases}$

$$\begin{vmatrix}36 & 4\\ 1 & -9\end{vmatrix}=-324-4=-328,\quad A=\frac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & -9\end{vmatrix}}{-328},\quad B=\frac{\begin{vmatrix}36 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}}{-328}$$

$A=\frac{9}{328}$, $B=\frac{1}{328}$. Pertanto $\varphi=\frac{9}{328}\cos(4x)+\frac{1}{328}\sin(4x)$.

Infine l'integrale generale di $y''-9y'+20y=4e^{5x}+\sin(4x)$ è

$$LV_2=\operatorname{span}\left\{e^{4x},e^{5x}\right\}+4xe^{5x}+\frac{9}{328}\cos(4x)+\frac{1}{328}\sin(4x).$$

$$\int_{-5}^{-4}(x+4)\sqrt{x+5}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}(x+4)\right]_{-5}^{-4}-\frac{2}{3}\int_{-5}^{-4}(x+5)^{3/2}\,dx$$

$$=-\frac{4}{15}\left[(x+5)^{\frac{5}{2}}\right]_{-5}^{-4}=-\frac{4}{15}.$$

Il seguente esercizio era contenuto nella sola seconda prova parziale.

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\int_0^x |t+7|e^{-2t^2}dt$

$|t+7|e^{-2t^2}\in C(\mathbb{R})$, quindi dal Teorema fondamentale del calcolo integrale $h\in C^1(\mathbb{R})$. Inoltre per ogni $x\in\mathbb{R}$ $h'=|x+7|e^{-2x^2}$. Osserviamo che $h'\in C(\mathbb{R})$ e per $x\neq 7$ h' è derivabile perché prodotto di funzioni derivabili. Infatti $|x+7|$ è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-7\}$ e e^{-2x^2} è derivabile in $\mathbb{R}$. Quindi $h''=\mathrm{sgn}(x+7)\,e^{-2x^2}+|x+7|(-4x)e^{-2x^2}$ per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}$. In particolare $h\in C^2(\mathbb{R}\setminus\{-7\})$.

Per quanto riguarda la monotonia sappiamo che $h'=|x+7|e^{-2x^2}$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Inoltre $h'\geq 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Quindi h è monotona crescente su tutto $\mathbb{R}$. In particolare $h'>0$ in $(-\infty,-7)$ e $h'>0$ in $(-7,+\infty)$. Allora h è monotona strettamente crescente in $(-\infty,-7)$ e h è monotona strettamente crescente in $(-7,+\infty)$. Inoltre $h\in C(\mathbb{R})$, quindi h è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Esaminiamo la convessità e la concavità.

$h''=\mathrm{sgn}(x+7)\,e^{-2x^2}\left(1-4x(x+7)\right)$ in $\mathbb{R}\setminus\{-7\}$. Pertanto

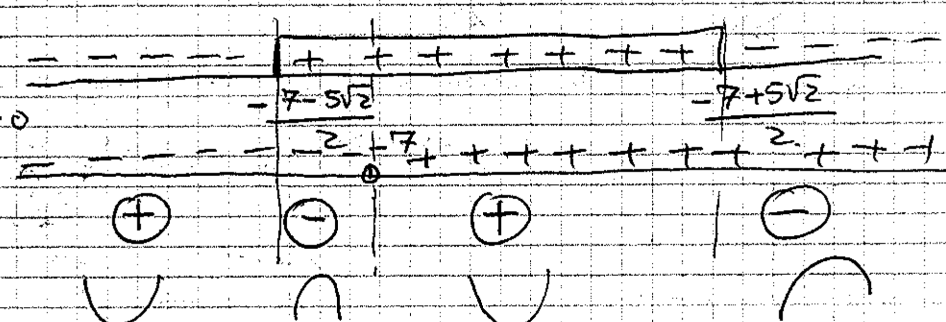
$$\begin{cases} h''>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}\end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{sgn}(x+7)\,e^{-2x^2}(-4x^2-28x+1)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x+7)(-4x^2-28x+1)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}\end{cases}$$

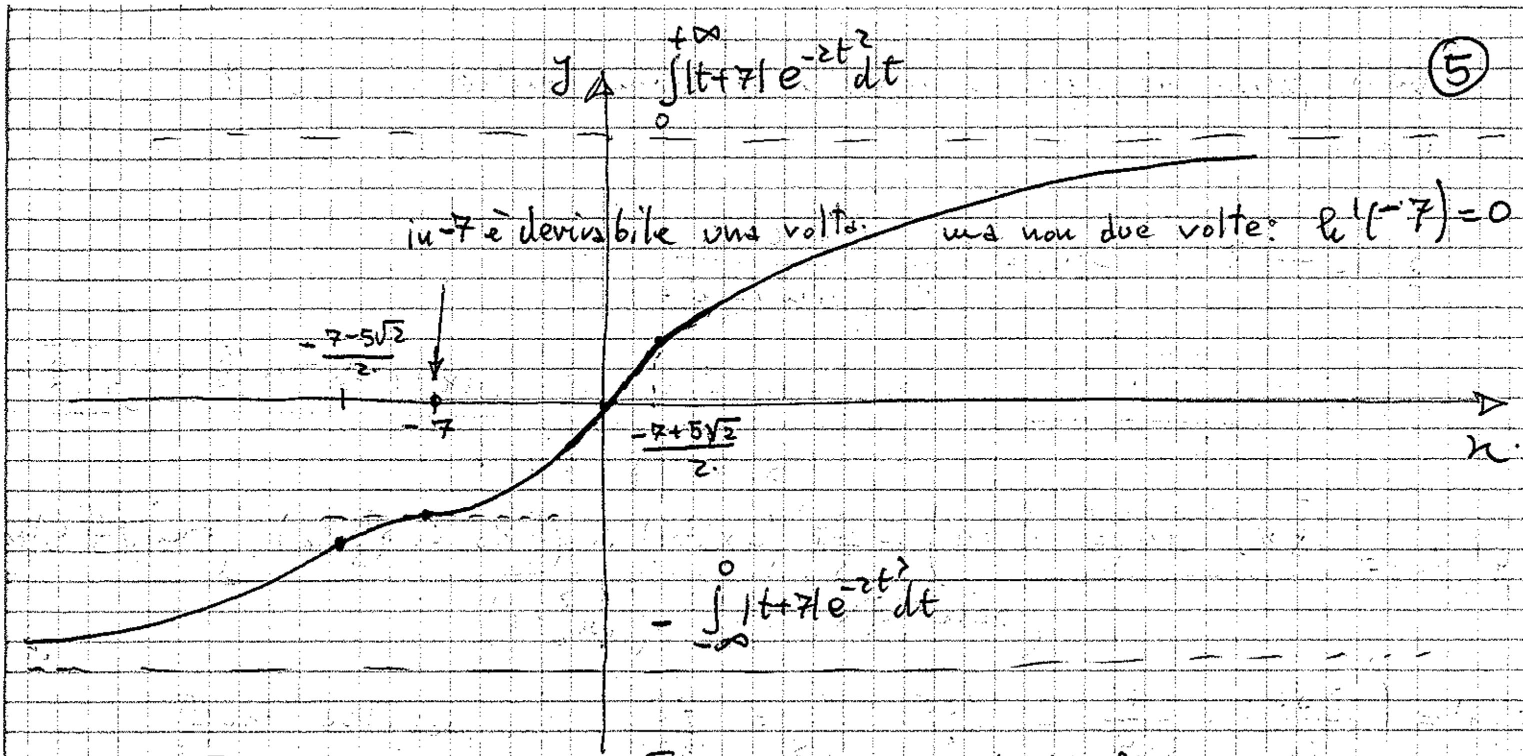
In particolare $-4x^2-28x+1>0$ se e solo se $x\in\left(\frac{-7-5\sqrt{2}}{2}, \frac{-7+5\sqrt{2}}{2}\right)$

Quindi

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x+7)(-4x^2-28x+1)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-7\}\end{cases}$$



Pertanto h è convessa in $\left(-\infty,\frac{-7-5\sqrt{2}}{2}\right]$ è convessa in $\left[-7,\frac{-7+5\sqrt{2}}{2}\right]$. Inoltre h è concava in $\left[\frac{-7-5\sqrt{2}}{2},-7\right]$ ed è concava in $\left[\frac{-7+5\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$.



$\frac{-7-5\sqrt{2}}{2}$, -7 e $\frac{-7+5\sqrt{2}}{2}$ sono punti di flesso.

Infine se $\int^{+\infty}|t+7|e^{-2t^2}dt$ è convergente allora $y=\int_0^{+\infty}|t+7|e^{-2t^2}dt$ è un asintoto orizzontale, analogamente se $\int_0^{-\infty}|t+7|e^{-2t^2}dt$ è convergente, allora

$$y=\int_0^{-\infty}|t+7|e^{-2t^2}dt$$ è l'equazione di un asintoto orizzontale.

Verifichiamo la convergenza di $\int_0^{+\infty}|t+7|e^{-2t^2}$ e $\int_0^{-\infty}|t+7|e^{-2t^2}$

$$|t+7|e^{-2t^2}\le c\,e^{-t} \quad \text{per } t\to+\infty$$, infatti

$$\frac{|t+7|e^{-2t^2}}{e^{-t}}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Quindi dal Teorema del confronto degli integrali generalizzati segue che $\int_0^{+\infty}|t+7|e^{-2t^2}<+\infty$ perché converge $\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$. Per quanto riguarda $\int_0^{-\infty}|t+7|e^{-2t^2}dt=-\int_{-\infty}^{0}|t+7|e^{-2t^2}dt$ sarà sufficiente provare la convergenza di $\int_{-\infty}^{0}|t+7|e^{-2t^2}dt$ procedendo in modo analogo al caso precedente.

Nella prova del primo appello vi erano anche i seguenti esercizi:

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad g(x)=\log\left(\frac{4x^2+1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4}\right)$$

$$g'(x)=\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4}{4x^2+1}\cdot\frac{8x\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4\right)-2(4x^2+1)\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)}{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4\right)^2}$$

$$g'(x_0)=\frac{\left[8x_0\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x_0\right)+4\right)-\frac{2}{3}\pi\,(4x_0^2+1)\sin\left(\frac{\pi}{3}x_0\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}x_0\right)\right]\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x\right)+4\right)}{\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{3}x_0\right)+4\right)^2\cdot\left(4x_0^2+1\right)}$$

$$g'(9)=\frac{288}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{4}}{325}=\frac{288}{4}\cdot\frac{1}{325}=\frac{72}{325}$$, perché $\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 9\right)=\sin(3\pi)=0$.

/——/

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5(n+3)!+(5n+1)^2(n+2)!+5^n}{(n+4)!-5^n+n^2}=25$$

$5(n+3)!+(5n+1)^2(n+2)!+5^n \sim (5n+1)^2(n+2)!$, $n\to+\infty$

$(n+4)!-5^n+n^2 \sim (n+4)!$, $n\to+\infty$; quindi

$$\frac{N}{D}\sim\frac{(5n+1)^2(n+2)!}{(n+4)!}\sim\frac{(5n+1)^2\cancel{(n+2)!}}{(n+4)(n+3)\cancel{(n+2)!}}\sim 25$$

/——/

$$\left(z^4+2-6i\right)\left(z^2-(4+3i)z+4+6i\right)=0$$

$z^4+2-6i=0 \quad \vee \quad z^2-(4+3i)z+4+6i=0$.

$z^4=-2+6i$, ovvero $z^4=\sqrt{40}\,e^{i\theta_0}$, dove

$\theta_0=-\operatorname{arctg}(3)+\pi$. Quindi quattro soluzioni sono date da:

$$z_k=(40)^{1/8}\,e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{4}}, \qquad k=0,1,2,3.$$

Infine $z^2-(4+3i)z+4+6i=0$ si risolve con la classica formula ⑦

$$\Delta=(4+3i)^2-4(4+6i)=\cancel{16}+\cancel{24i}-9-\cancel{16}-\cancel{24i}=-9$$

$w^2=-9$ ha come soluzioni $\pm 3i$. Pertanto

$$z_{5,6}=\frac{4+3i\pm 3i}{2}=\begin{cases}\dfrac{4+6i}{2}=2+3i\\[2ex] \dfrac{4}{2}=2.\end{cases}$$