Correzione del primo appello di Analisi Matematica L-A (CdL in Ingegneria Elettronica e in Ingegneria Automatica) A.A. 2005/2006

ESERCIZIO 1

Le soluzioni dell'equazione data si ottengono risolvendo

$$z^4 + 8 + 10i = 0$$

e

$$z^2 + (10 + 8i)z + 80i = 0.$$

Per quanto riguarda la prima equazione, abbiamo $z^4 = -8 - 10i$ e $-8 - 10i = \sqrt{164}e^{i\theta}$, dove

$$\theta = \arctan\frac{5}{2} + \pi.$$

Quindi le soluzioni della prima equazione sono per $k = 0, 1, 2, 3$

$$z_k = \sqrt[8]{164}e^{i\theta_k}$$

e $\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{4}$.

Mentre possiamo fattorizzare la seconda scrivendo

$$z^2 + (10 + 8i)z + 80i = (z + 8i)(z + 10) = 0.$$

Pertanto le soluzioni della seconda sono $z_4 = -8i$ e $z_5 = -10$.

ESERCIZIO 2

Poiché $e^{-13n} = o(\sqrt[10]{n})$, per $n \to \infty$, e $\log(10n+13) = o(\sqrt[10]{n})$ per $n \to \infty$, segue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[10]{n} + e^{-13n} + \log(10n + 13)}{n^{\frac{1}{10}} + 10e^{-13n} + 13\log(10n + 13)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[10]{n}}{n^{\frac{1}{10}}} = 1$$

ESERCIZIO 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 8} - \sqrt{2n^2 + 10}}{\sqrt{n^2 + 2} + \sqrt{n^2 + 3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{1 + \frac{8}{n^2}} - \sqrt{2 + \frac{10}{n^2}})}{n(\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}.$$

ESERCIZIO 4

i) la serie è a termini positivi.

ii) $a_n \sim \frac{1}{n^2}$, per $n \to \infty$. Quindi $a_n \to 0$ per $n \to \infty$.

iii) dal criterio asintotico delle serie segue che la serie data è convergente, perchíl termine n-esimo è asintotico al termine n-esimo della serie armonica generalizzata di esponente 2.

ESERCiZIO 5

(i) $D = R \setminus \{8\}$.

(ii) $g(8) = 1$ e $\lim_{x\to 8^+} g \neq \lim_{x\to 8^-} g$. Quindi g non è continua in 8, mentre g è continua in D.

(iii) g è derivabile in $D \setminus \{2\} = R \setminus \{8, 2\}$.

(iv) Se $x \in D \setminus \{2, 8\}$ allora

$$g'(x) = \frac{sgn(x-10)\cos\mid x-10\mid (x-8) - \sin\mid x-10\mid}{(x-8)^2}$$

e

$$g'(1) = \frac{7\cos 9 - \sin 9}{49}.$$

ESERCIZIO 6

Posto $\cos(t) = s$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(t)+2}{\cos^2(t)+\cos(t)+2}\sin(t)dt = -\int_1^0 \frac{2s+2}{s^2+s+2}ds = \int_0^1 \frac{2s+2}{s^2+s+2}ds$$

$$= \int_0^1 \frac{2s+1}{s^2+s+2}ds + \int_0^1 \frac{1}{s^2+s+2}ds$$

$$= [\log\mid s^2+s+2\mid]_{s=0}^{s=1} + [\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(s+\frac{1}{2}))]_{s=0}^{s=1} = \log 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan\sqrt{3} - \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}))$$

ESERCIZIO 7

$$\int_{-8}^{10}(x+8)\cos(x-10)dx = [(x+8)\sin(x-10)]_{x=-8}^{x=10} - \int_8^{10}\sin(x-10)dx = 1-\cos(18).$$

ESERCIZIO 8

Il dominio d'esistenza della funzione è dato dall'insieme degli $x \in R \setminus \{\pm\sqrt{10}\}$ per cui

$$\frac{x^2-8}{x^2-10} > 0,$$

quindi

$$D = (-\infty, -\sqrt{10}) \cup (-\sqrt{8}, -\sqrt{8}) \cup (-\sqrt{10}, +\infty).$$

Calcoliamo la derivata prima in D

$$f'(x) = \frac{x^2-10}{x^2-8}\frac{2x(x^2-10)-2x(x^2-8)}{(x^2-10)^2} = \frac{-4x}{(x^2-10)^2}\frac{x^2-10}{x^2-8}.$$

(i) $f'(x) > 0$ in D se e solo se $\frac{x}{(x^2-10)^2} < 0$ in D, se e solo se $x < 0$ in D.

Pertanto f è monotona strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{10})$ ed è monotona strettamente crescente in $(-\sqrt{8}, 0]$.

(ii) 0 è punto di massimo locale per f.

ESERCIZIO 9

La funzione è di classe C^2 in $D = R \setminus \{7, 4\}$. Calcoliamo la derivata seconda in D. In D abbiamo

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x-4) \log \mid x-7 \mid + \frac{\mid x-4 \mid}{x-7}.$$

Inoltre in D

$$f''(x) = \frac{2(x-7)\operatorname{sgn}(x-4) - \mid x-4 \mid}{(x-7)^2}.$$

Prima di determinare gli intervalli in cui la funzione è concava studiamo il segno della derivata seconda in D. Pertanto $f'' > 0$ in D se e solo se $2(x-7)\operatorname{sgn}(x-4) - \mid x-4 \mid > 0$ in D, se e solo se $(2(x-7)-(x-4))\operatorname{sgn}(x-4) > 0$ in D, se e solo se $(x-10)\operatorname{sgn}(x-4) > 0$ in D. Si deduce allora che $f'' < 0$ in D se e solo se $x \in (4, 10]$.

Quindi f è concava in $(4, 10]$.

ESERCIZIO 10

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^3 x - \cosh(3x) - 3x}{\sin(7x) - 7x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{6}x^3 - 1 - \frac{9}{2}x^2 - 3x + o(x^3)}{7x - \frac{7^3}{6}x^3 - 7x} = -\frac{27}{7^3}$$