Analisi Matematica LA - Primo appello e prova conclusiva
CdL in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio e CdL in Ingegneria per le Telecomunicazioni
A.A. 2004/2005 Dott. F. Ferrari
10 Dicembre 2004

Gli esercizi da 1 a 8 costituivano il testo del primo appello. Gli esercizi da 1 a 5 più l'esercizio 9 (facoltativo) costituivano il testo della prova conclusiva (secondo parziale).

ESERCIZIO 1 [4 punti] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) - 3\sinh(x)}{x^2 \cos(3x + x^2) \log(1 + x)}$$

ESERCIZIO 2 [4 punti] Determinare in quali punti la funzione seguente è derivabile, e determinare in quali intervalli essa è crescente

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = |x - 2|e^{-|x-3|}$$

ESERCIZIO 3 [4 punti]Calcolare l'integrale

$$\int_{-1}^{3} (x + 2) \log(x + 2)\ dx$$

ESERCIZIO 4 [4 punti]Calcolare l'integrale

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\ dx$$

ESERCIZIO 5 [3 punti]

Sia $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) Se 0 è punto di minimo locale per f allora $f'(0) = 0$
b) Se $f'(0) > 0$ allora f è crescente
c) Se f è strettamente crescente allora $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (0, 4)$
d) Se $\max f = f(2)$, allora $f'(2) = 0$

ESERCIZIO 6

[3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(0) = 1$, $f'(1) = 2$. Sia poi $g(x) = f(\exp(5x))$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

a) $g'(1) = 10$
b) $g'(0) = 10$
c) $g'(0) = 2$
d) $g'(1) = 10e^5$

ESERCIZIO 7

[4 punti] Calcolare il limite seguente:

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{n^4 - \log(n^8 + 1)}{3n^4 + 2n^2 + 5\log(n^8 + 1)}$$

ESERCIZIO 8

[4 punti] Determinare per quali valori reali la seguente funzione è derivabile e calcolarne la derivata

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x^2 \sin(|x^2 - 3| + 5)$$

ESERCIZIO 9 (ESERCIZIO FACOLTATIVO)

[5 punti] Svolgere per esteso il seguente esercizio. Determinare il dominio naturale della seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{\mid x - 5 \mid} - 2 \log \mid x - 5 \mid$$

e dire in quali intervalli la funzione è convessa.

TRACCIA DEGLI SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1.

Dalla formula di Taylor segue che

$$\sin(3x) = 3x - \frac{27}{6}x^3 + o(x^4), \;\; x \to 0,$$

$$\sinh(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \;\; x \to 0,$$

$$\log(1 + x) = x + o(x), \;\; x \to 0.$$

Osserviamo che non è di alcuna utilità sviluppare $\cos(3x+x^3)$, perché $\cos 0 = 1$. Pertanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x) - 3\sinh(x)}{x^2 \cos(3x + x^2) \log(1 + x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{3x - \frac{27}{6}x^3 + o(x^4) - 3(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))}{x^2 \cos(3x + x^2)(x^2 + o(x^2))} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{27}{6}x^3 - \frac{3}{6}x^3 + o(x^4)}{x \cos(3x + x^2)(x + o(x^2))} = -5. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2

La seguente funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x - 2|e^{-|x-3|}$$

è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$ e

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname{sgn}(x - 2)e^{-|x-3|} - \operatorname{sgn}(x - 3)|x - 2|e^{-|x-3|} \\ &= e^{-|x-3|}(\operatorname{sgn}(x - 2) - \operatorname{sgn}(x - 3)|x - 2|). \end{aligned}$$

Determiniamo gli intervalli in cui per $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, $f'(x) > 0$. Conviene risolvere la disequazione per casi.

Caso 1. Se $x < 2$, allora

$$f'(x) = e^{-|x-3|}(-1 - x + 2) = e^{-|x-3|}(1 - x);$$

pertanto se $x \in]-\infty, 1[$, allora $f'(x) > 0$.

Caso 2. Se $x \in]2, 3[$, allora

$$f'(x) = e^{-|x-3|}(1 + x - 2) = e^{-|x-3|}(x - 1),$$

quindi se $x \in]2,3[$, allora $f'(x) > 0$.

Infine se $x > 3$, allora

$$f'(x) = e^{-|x-3|}(1 - x + 2) = e^{-|x-3|}(3 - x).$$

Quindi per $x > 3$ $f'(x)$ non è mai positiva.

Infine riassumendo.

f è monotona strettamente crescente in $]-\infty, 1]$.

f è monotona strettamente crescente in $[2, 3]$.

ESERCIZIO 3

Procediamo ad una integrazione per parti avendo cura di scegliere fra le primitive di 1 la funzione $x + 2$. Ciò semplificherà i calcoli.

$$\int_{-1}^{3} (x+2)\log(x+2)\ dx = [2^{-1}(x+2)^2 \log(x+2)]_{x=-1}^{x=3} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} \frac{(x+2)^2}{x+2}\ dx$$
$$= [2^{-1}(x+2)^2 \log(x+2) - 2^{-2}(x+2)^2]_{x=-1}^{x=3} = \frac{25}{2}\log 5 - \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}\log 5 - 6.$$

ESERCIZIO 4

Il denominatore è un polinomio di secondo grado con discriminante negativo. Scriviamo allora il polinomio come la somma del quadrato di un binomio più un numero positivo. Infatti

$$x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) - 4 + 5 = (x+2)^2 + 1.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{(x+2)^2 + 1}\ dx.$$

L'integrale ora è immediato (altrimenti procedere per sostituzione ponendo $t = x + 2$), da cui

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\ dx = [\arctan(x+2)]_{x=0}^{x=1} = \arctan 3 - \arctan 2.$$

ESERCIZIO 5

La risposta a) è falsa, si pensi al caso $f(x) = x$.

La risposta b) è falsa, si pensi al caso $f(x) = -x^2 + 1$ che è crescente in $[0, 1]$ ma non lo è in $[0, 4]$, sebbene $f'(0) = 1 > 0$.

La risposta c) è falsa, si pensi al caso $f(x) = (x-1)^3$ per il quale $f'(1) = 0$.

La risposta d) è vera per il teorema di Fermat. Infatti 2 è punto interno estremante per f. Inoltre f è derivabile in 2, quindi $f'(2) = 0$.

ESERCIZIO 6

Calcoliamo la derivata di $g(x) = f(\exp(5x))$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 5f'(y)_{|y=\exp(5x)} \cdot \exp(5x).$$

Pertanto $g'(0) = 5f'(1) = 10$, perché sappiamo che $f'(1) = 2$. L'unica risposta esatta è la b).

ESERCIZIO 7

Ogni polinomio di grado positivo è un infinito di ordine superiore rispetto ad ogni $\log P_q(n)$ con $P_q(n)$ polinomio di grado $q > 0$, per $n \to +\infty$. Quindi

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4 - \log(n^8+1)}{3n^4 + 2n^2 + 5\log(n^8+1)} \\ = & \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4(1 - \frac{\log(n^8+1)}{n^4})}{n^4(3 + 2n^{-2} + 5\frac{\log(n^8+1)}{n^4})} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 8

La seguente funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x^2 \sin(|x^2 - 3| + 5)$$

è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$, perché composizione di funzioni derivabili. In particolare per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$

$$f'(x) = 2x \sin(|x^2 - 3| + 5) + 2x^3 \mathrm{sgn}(x^2 - 3) \cos(|x^2 - 3| + 5).$$

Notiamo infine che $\lim_{\sqrt{3}^+} f'(x) \neq \lim_{\sqrt{3}^-} f'(x)$ e analogamente $\lim_{-\sqrt{3}^+} f'(x) \neq \lim_{-\sqrt{3}^-} f'(x)$. Quindi la funzione f ̀ derivabile soltanto in $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$.

ESERCIZIO 9 (Facoltativo)

Il dominio naturale di

$$f(x) = \sqrt{|\, x - 5 \,|} - 2 \log |\, x - 5 \,|$$

è $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Inoltre la funzione f in tale dominio è derivabile, perché composizione di funzioni derivabili. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} |\, x - 5 \,|^{-\frac{1}{2}} \mathrm{sgn}(x - 5) - 2 \,|\, x - 5 \,|^{-1} \mathrm{sgn}(x - 5) \\ &= \mathrm{sgn}(x - 5)(\frac{1}{2} |\, x - 5 \,|^{-\frac{1}{2}} - 2 \,|\, x - 5 \,|^{-1}). \end{aligned}$$

La funzione è ulteriormente derivabile nel dominio naturale d'esistenza (è ancora composizione di funzioni derivabili). Pertanto, ricordando che $(\mathrm{sgn}(y))' = 0$, se $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{sgn}(x - 5)(-\frac{1}{4} |\, x - 5 \,|^{-\frac{3}{2}} \mathrm{sgn}(x - 5) + 2 \,|\, x - 5 \,|^{-2} \mathrm{sgn}(x - 5)) \\ &= (\mathrm{sgn}(x - 5))^2(-\frac{1}{4} |\, x - 5 \,|^{-\frac{3}{2}} + 2 \,|\, x - 5 \,|^{-2}) \\ &= -\frac{1}{4} |\, x - 5 \,|^{-\frac{3}{2}} + 2 \,|\, x - 5 \,|^{-2} . \end{aligned}$$

Studiamo ora il segno della derivata seconda. In $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ si ha che $f''(x) > 0$ se

$$-\frac{1}{4} |\, x - 5 \,|^{-\frac{3}{2}} + 2 \,|\, x - 5 \,|^{-2} > 0.$$

Ovvero se

$$\frac{-\mid x-5\mid^{\frac{1}{2}}+8}{\mid x-5\mid^{-2}} > 0.$$

Da ciò segue che in $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ la $f''(x) > 0$ se $-\mid x-5\mid^{\frac{1}{2}}+8 > 0$ e $x \neq 5$, ovvero se $64 > \mid x-5 \mid$ e $x \neq 5$, cioè se $-64 < x-5 < 64$ e $x \neq 5$, ovvero se $x \in]-59, 5[\cup]5, 69[$. Finalmente possiamo concludere che:

f è convessa in $]-59, 5[$,

f è convessa in $]5, 69[$.