#
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3\pi x \sin t, & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x^2 & x \in [0,1] \end{cases}$$

Cerchiamo una soluzione di $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial x^2}$ con le condizioni $u(0,t) = u(1,t) = 0$ nella forma $u = X \cdot T$

$T'X = TX''$, $X(0) = X(1) = 0$. Pertanto $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$

Gli unici autovalori sono dati da $\lambda_K = K^2\pi^2$ e le autosol. $\{\sin(K\pi x)\}_{K \in \mathbb{N}}$

- Infatti se $\lambda > 0$ $V_2 = \text{span}\{e^{\sqrt{\lambda} x}, e^{-\sqrt{\lambda} x}\}$, quindi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$ ha soluzioni non banali se e solo se $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = 0$

$\iff e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} = 0 \iff 1 = e^{2\sqrt{\lambda}} \iff \lambda = 0.$

- Se $\lambda = 0$ $V_2 = \text{span}\{1, x\}$, quindi

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

- Se $\lambda < 0$ $V_2 = \text{span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|} x), \sin(\sqrt{|\lambda|} x)\}$, da cui

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{|\lambda|} + c_2 \sin\sqrt{|\lambda|} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \\ \sin\sqrt{|\lambda|} = 0 \end{cases} \quad \sqrt{|\lambda|} = K\pi$$

$\lambda = -K^2\pi^2$, $\{\sin(K\pi x)\}_{K \in \mathbb{N}}$ autosoluzioni

A questo punto cerchiamo le soluzioni del problema non omogeneo dopo aver sviluppato in serie di Fourier

$$3x \sin t \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin t$$

dove b_k sono i coeff. di Fourier della funzione $3x$ prolungata come funzione dispari nell'intervallo $[-1,0]$ e poi su tutto $\mathbb{R}$ come funzione 2-periodica

$$b_k = 2\int_0^1 3s\sin(k\pi s)\,ds = 6\int_0^1 s\sin(k\pi s)\,ds$$

$$= \left[-s\frac{6\cos(k\pi s)}{k\pi}\right]_{s=0}^{s=1} + 6\int_0^1 \frac{\cos(k\pi s)}{k\pi}\,ds = -\frac{6\cos(k\pi)}{k\pi} + \left[\frac{\sin k\pi s}{(k\pi)^2}\right]_{s=0}^{s=1}$$

$$= -\frac{6(-1)^k}{k\pi} = (-1)^{k+1}\frac{6}{k\pi}$$

Cercheremo una soluzione nella forma $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)\cdot T_k(t)$ con T_k funzione da determinare, di $u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3x\sin t$ ovvero di $u_t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\sin k\pi x)\cdot\sin t$

Sostituendo, formalmente otteniamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k' \sin(k\pi x) = -k^2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi x)\,T_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)\sin t$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k' + k^2\pi^2 T_k - b_k\sin t\right)\sin(k\pi x) = 0$$

Richiederemo che per ogni $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$T_k' + k^2\pi^2 T_k = b_k\sin t$$

Inoltre, per $t=0$ $\sum_{k=1}^{\infty}\sin(k\pi x)\,T_k(0) = x^2$, quindi sviluppando x^2 in serie di Fourier dopo aver prolungato x^2 come funzione dispari in $[-1,0]$, otteniamo

$$x^2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)$$

$$c_k = 2\int_0^1 s^2\sin(k\pi s)\,ds = 2\left[-s^2\frac{\cos(k\pi s)}{k\pi}\right]_{s=0}^{s=1} + \frac{4}{k\pi}\int_0^1 s\cos(k\pi s)\,ds$$

$$= -\frac{2(-1)^k}{k\pi} + \frac{4}{k\pi}\left\{ \left[s\frac{\sin(k\pi s)}{k\pi}\right]_{s=0}^{s=1} - \int_0^1 \frac{\sin k\pi s}{k\pi}\,ds \right\}$$

$$= \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{4}{(k\pi)^3}\left[\cos k\pi s\right]_{s=0}^{s=1} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k\pi} - \frac{4}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right)$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left((-1)^{k+1} - \frac{4}{(k\pi)^2}\left((-1)^k - 1\right)\right)$$

Richiederemo pertanto che $T_k(0) = c_k$. Dobbiamo risolvere allora il seguente problema di Cauchy

$$P_k \quad \begin{cases} T_k' + k^2\pi^2 T_k = b_k \sin t \\ T_k(0) = c_k. \end{cases}$$

La equazione omogenea ha come integrale generale $\operatorname{span}\{e^{-k^2\pi^2 t}\}$. Per ogni k l'eq. non omogenea ha come soluzione particolare (per simpatia) una funzione $A_k \cos t + B_k \sin t$ da determinare mediante sostituzione

$$-A_k \sin t + B_k \cos t + k\pi^2\left(A_k \sin t + B_k \cos t\right) = b_k \sin t,$$

da cui segue $\begin{cases} -A_k + k^2\pi^2 A_k = b_k \\ B_k + k^2\pi^2 B_k = 0 \end{cases}$, $\det\begin{vmatrix} -1 & k^2\pi^2 \\ 1 & k^2\pi^2 \end{vmatrix} = -2k^2\pi^2$.

$$A_k = \frac{\det\begin{vmatrix} b_k & k^2\pi^2 \\ 0 & k^2\pi^2 \end{vmatrix}}{-2k^2\pi^2} = -\frac{b_k}{2}, \quad B_k = \frac{\det\begin{vmatrix} -1 & b_k \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2k^2\pi^2} = \frac{b_k}{2k^2\pi^2}.$$

Quindi l'integrale generale è per ogni k

$$D_k e^{-k^2\pi^2 t} - \frac{b_k}{2}\cos(t) + \frac{b_k}{2k^2\pi^2}\sin(t),$$

mentre la soluzione di P_k la otteniamo imponendo

$$D_k - \frac{b_k}{2} = c_k, \quad \text{cioè} \quad D_k = c_k + \frac{b_k}{2}$$

Pertanto la soluzione di P_k è

$$\left(c_k+\frac{b_k}{2}\right)e^{-k^2\pi^2 t}+\frac{b_k}{2}\left(\frac{\sin t}{k\pi^2}-\cos t\right).$$

La soluzione del problema iniziale è allora

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(c_k+\frac{b_k}{2}\right)e^{-k^2\pi^2 t}+\frac{b_k}{2}\left(\frac{\sin t}{k^2\pi^2}-\cos t\right)\right]\sin(k\pi x).$$

2

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=u & , \quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geq 1,\ x\in\mathbb{R}\}\\ u(x,y)=x+y & , \quad \Gamma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y=1,\ x\in\mathbb{R}\}\end{cases}$$

$F(p_1,p_2,z,x,y)=p_1p_2-z$. Scriviamo il sistema delle caratteristiche ottenendo

$$\begin{cases}\dot{x}=p_2\\ \dot{y}=p_1\\ \dot{z}=2p_1p_2\\ \dot{p}_1=+p_1\\ \dot{p}_2=+p_2\end{cases}$$

Per risolvere il problema di Cauchy su Γ abbiamo

$x(0)=s \qquad y(0)=1, \qquad z(0)=1+s.$

Ricaviamo $p_1(0)=\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,1)=\dfrac{\partial}{\partial x}(x+1)=1$. Inoltre dall'equazione su Γ otteniamo $p_2(0)=1+s$, perché:

$$\begin{cases}p_1(0)\,p_2(0)=1+s\\ p_1(0)=1\end{cases}.$$

Risolviamo ora il problema di Cauchy

$p_1(t) = e^t$, $p_2 = (1+s)e^t$ da cui segue

$$\begin{cases} \dot{x} = (1+s)e^t \\ x(0) = s \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{y} = e^t \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{z} = 2(1+s)e^{2t} \\ z(0) = 1+s \end{cases}$$

$x(t) = s + (1+s)\left(e^t - 1\right)$, cioè $x(t) = (1+s)e^t - 1$

$y(t) = \cancel{1} + e^t - \cancel{1}$; $z(t) = 1+s + 2(1+s)\left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

da cui $z(t) = 1+s + (1+s)\left(e^{2t} - 1\right) = (1+s)e^{2t}$

Quindi la forma parametrica della soluzione è:

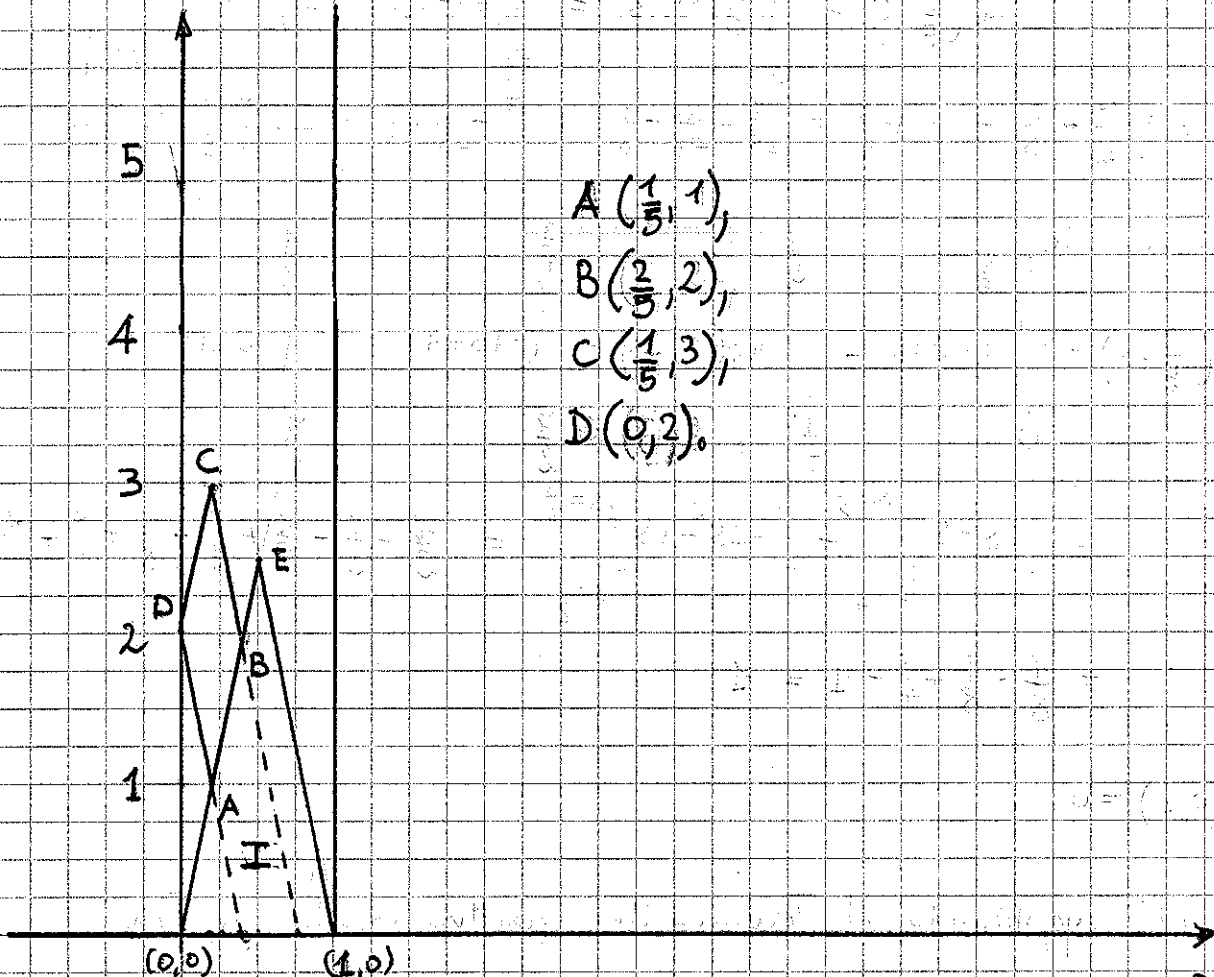
$$\begin{cases} x = (1+s)e^t - 1 \\ y = e^t \\ z = (1+s)e^{2t} \end{cases}$$

La forma cartesiana è $\begin{cases} x = (1+s)y - 1 \\ z = (1+s)y^2 \end{cases}$

da cui $z = \frac{1+x}{y} \cdot y^2$ cioè $z = y(1+x)$.

3

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{25}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t) = 0 = u(1,t), & t>0 \\ u(x,0) = 0 & x\in[0,1] \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}, \quad \text{con} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{4} \\ 4x-1, & \text{se } \frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \\ -4x+3, & \text{se } \frac{1}{2} \le x < \frac{3}{4} \\ 0, & \text{se } \frac{3}{4} \le x \le 1 \end{cases}$$



$A\left(\frac{1}{5}, 1\right)$,
$B\left(\frac{2}{5}, 2\right)$,
$C\left(\frac{1}{5}, 3\right)$,
$D(0,2)$.

Le rette caratteristiche sono $x - \frac{1}{5}t = k$ e $x + \frac{1}{5}t = m$, $k, m \in \mathbb{R}$.
La retta caratteristica $x - \frac{1}{5}t = 0$ e quella per $(1,0)$ della fam $x + \frac{1}{5}t = m$ determinano il settore triangolare di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, E. In particolare la retta per $(1,0)$ della fam $x + \frac{1}{5}t = m$ ha eq. $x + \frac{1}{5}t = 1$.
Determiniamo il parallelogramma individuato dalle rette caratteristiche per $\left(\frac{1}{5}, 3\right)$ di vertici A, B, C, D con C di coordinate $\left(\frac{1}{5}, 3\right)$. La retta $x - \frac{1}{5}t = -\frac{2}{5}$ passa per C e individua D di coordinate $(0,2)$: $\begin{cases} x - \frac{1}{5}t = -\frac{2}{5} \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t = 2 \\ x = 0. \end{cases}$
La retta $x + \frac{1}{5}t = \frac{2}{5}$ per D intersecata con la retta $x - \frac{1}{5}t = 0$ determina A:
$\begin{cases} x + \frac{1}{5}t = \frac{2}{5} \\ x - \frac{1}{5}t = 0 \end{cases}$ $A\left(\frac{1}{5}, 1\right)$. La retta $x + \frac{1}{5}t = \frac{4}{5}$ per C e la retta $x - \frac{1}{5}t = 0$ determinano B $\begin{cases} x - \frac{1}{5}t = 0 \\ x + \frac{1}{5}t = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} t = 2 \\ x = \frac{2}{5} \end{cases}$

Per individuare il valore della soluzione nel punto A, appartenente al settore I utilizziamo la formula di D'Alembert

$$u(x,t) = \int_{x-\frac{1}{5}t}^{x+\frac{1}{5}t} g(s)\,ds$$

Pertanto $$u\left(\frac{1}{5},1\right) = \int_0^{\frac{2}{5}} g(s)\,ds = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{5}} (4s-1)\,ds = \Big[2s^2 - s\Big]_{s=\frac{1}{4}}^{s=\frac{2}{5}}$$

$$= 2\cdot\frac{4}{25} - \frac{2}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{8}{25} - \frac{10}{25} + \frac{1}{8} = -\frac{2}{25} + \frac{1}{8} = \frac{-16+25}{25\cdot 8} = \frac{9}{200}$$

Analogamente

$$u\left(\frac{2}{5},2\right) = \int_0^{\frac{4}{5}} g(s)\,ds = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} (4s-1)\,ds + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} (-4s+3)\,ds + \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{5}} 0\,ds$$

$$= \Big[2s^2 - s\Big]_{s=\frac{1}{4}}^{s=\frac{1}{2}} + \Big[-2s^2 + 3s\Big]_{s=\frac{1}{2}}^{s=\frac{3}{4}} = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{9}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} + \frac{9}{4} - 1 = 1$$

$$u(0,2) = 0$$

Quindi applicando il Teorema dei quattro punti si ha

$$u\left(\frac{1}{5},3\right) = u(0,2) + u\left(\frac{2}{5},2\right) - u\left(\frac{1}{5},1\right) = 1 - \frac{9}{200} = \frac{191}{200}$$

#4 $\begin{cases} y' = y^2 + x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Il funzionale associato all'equazione di Volterra è:

$$\varphi \xrightarrow{T} y(0) + \int_0^x (\varphi(s) + s)^2 ds = \int_0^x (\varphi(s) + s)^2 ds$$

La successione del Teorema di Banach - Caccioppoli è

$\varphi_1 = T\varphi_0$, dove $\varphi_0 = 0$ e $\varphi_{n+1} = T\varphi_n$

Pertanto $\varphi_1 = \int_0^x s ds = \frac{1}{2}x^2$

$$\varphi_2 = \int_0^x \left(\frac{1}{2}s^2\right)^2 + s ds = \frac{1}{4}\int_0^x s^4 + \int_0^x s ds = \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_3 = \int_0^x \left(\frac{1}{20}s^5 + \frac{1}{2}s^2\right)^2 + s ds$$

$$= \int_0^x \frac{1}{400}s^{10} + \frac{1}{20}s^7 + \frac{1}{4}s^4 + s ds = \frac{1}{4400}x^{11} + \frac{1}{160}x^8 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{2}x^2$$

D'altra parte $f(x,y) = y^2 + x \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è C^∞. Calcoliamo la formula di Taylor all'ordine 4.

$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

$y'' = 2yy' + 1 \qquad y''(0) = 1$

$y''' = 2y'^2 + 2yy'' \qquad y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 4y'y'' + 2y'y'' + 2yy''' \qquad y^{IV}(0) = 0$

Quindi $y(x) \sim \frac{x^2}{2}$, $x \to 0$