Es. 1 $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 10xt & x\in(0,1),\ t>0 \\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0, & x\in[0,1] \\ u(x,0)=x^2, & x\in[0,1]. \end{cases}$ (1)

Consideriamo l'eq. omogenea

$$u_t - u_{xx} = 0$$

e applichiamo il metodo della separazione delle variabili

$$XT' - TX'' = 0 \qquad \frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \lambda \text{ costante}$$

$$X(0)T(t) = 0 \quad e \quad X(1)T(t) = 0 \longrightarrow X(0)=X(1)=0$$

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$$

(1) $\lambda>0$ $\quad V_2 = \text{span}\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$; $\quad c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$;

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \longrightarrow \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & e^{-\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = 0 \iff e^{-\sqrt{\lambda}} - e^{\sqrt{\lambda}} = 0$$

$\iff e^{2\sqrt{\lambda}} = 1 \iff \lambda = 0$. Non ci sono autovalori.

(2) $\lambda = 0$ $\quad V_2 = \text{span}\{1, x\}$; $\quad c_1 + c_2 x$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}.$$ Non ci sono autovalori.

(3) $\lambda<0$ $\quad V_2 = \text{span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|}x), \sin(\sqrt{|\lambda|}x)\}$; $c_1\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$;

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1\cos\sqrt{|\lambda|} + c_2\sin\sqrt{|\lambda|} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2\sin\sqrt{|\lambda|} = 0 \end{cases},$$ quindi se

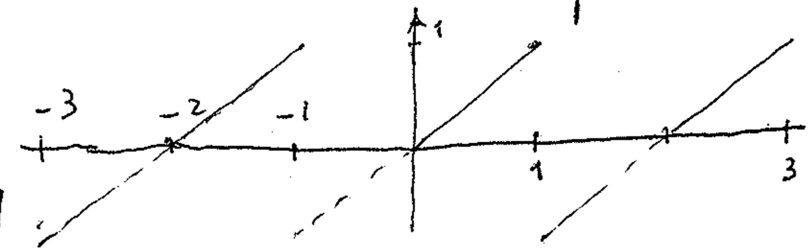
$\sin\sqrt{\lambda} = 0$ allora è soddisfatto per c_1 e $c_2 \neq 0$.

$\sqrt{|\lambda|} = k\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \quad \longleftrightarrow |\lambda| = k^2\pi^2 \longrightarrow \lambda_k = -k^2\pi^2$

e $\quad \{\sin(k\pi x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ fam. di autosoluzioni.

Supponiamo ora di cercare una soluzione del problema

$$u_t - u_{xx} = 10xt$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$$
$$u(x,0) = x^2, \quad x \in [0,1]$$

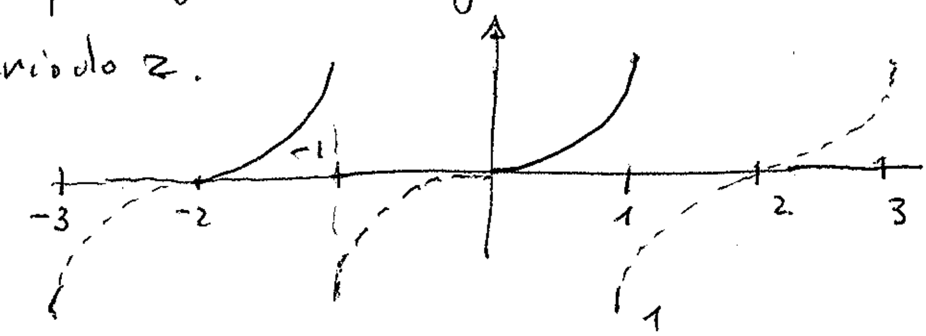


con $10xt \sim 10t \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$ e b_k coeff. di Fourier della funzione x prolungata come funzione dispari su $[-1,1]$ e periodica di periodo 2. Quindi

$$b_k = 2\int_0^1 x \sin(k\pi x)\,dx = 2\left\{\left[-x\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx\right\}$$

$$= 2\left(-\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \left[\frac{\sin(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_{x=0}^{x=1}\right) = 2\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + 0\right) = \frac{2}{k\pi}(-1)^{k+1}.$$

con $x^2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(k\pi x)$ e d_k coeff. di Fourier della funzione x^2 prolungata come funzione dispari su $[-1,1]$ e periodica di periodo 2.



$$d_k = 2\int_0^1 x^2 \sin(k\pi x)\,dx = 2\left\{\left[-x^2\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^{x=1} + 2\int_0^1 \frac{x}{k\pi}\cos(k\pi)x\,dx\right\}$$

$$= 2\left(-\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\left[x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{2}{k^2\pi^2}\int_0^1 \sin(k\pi x)\,dx\right)$$

$$= 2\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\left[-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right]_{x=0}^{x=1}\right) = 2\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} - \frac{2}{k^3\pi^3}(-\cos k\pi + 1)\right)$$

$$= 2\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \frac{2}{k^3\pi^3}\underbrace{(\cos(k\pi) - 1)}_{0 \text{ se } k \text{ è pari},\ -2 \text{ se } k \text{ è dispari}}\right)$$

Cercheremo la soluzione del problema nella forma $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(k\pi x)$, con $T_k(t)$ funzioni da determinare. Pertanto, sostituendo, formalmente si ha:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \sin(k\pi x) + k^2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin(k\pi x) = 10t \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin(k\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(k\pi x) \end{cases}$$

, da cui

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k' + k^2\pi^2 T_k - 10t b_k\right) \sin(k\pi x) = 0 & \text{in } (0,1)\times(0,+\infty) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k(0) - d_k\right) \sin(k\pi x) = 0 & \text{in } [0,1] \end{cases}$$

Ricaviamo quindi la condizione per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k>0$.

$$(PC)_k \begin{cases} T_k' + k^2\pi^2 T_k = 10 t b_k \\ T_k(0) = d_k \end{cases}$$

$V_1 = \operatorname{span}\{e^{-k^2\pi^2 t}\}$. per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k>0$.

Cerchiamo una sol. particolare per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k>0$.

Poiché $b_k \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k>0$ possiamo cercare una sol. nella forma $A_k + B_k t$. Pertanto

$(A_k + B_k t)' = B_k$ e sostituendo si ha:

$$B_k + k^2\pi^2 (A_k + B_k t) = 10 t b_k ,$$

Se ne deduce che

$$\begin{cases} B_k + k^2\pi^2 A_k = 0 \\ k^2\pi^2 B_k = 10 b_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_k = -\dfrac{10 b_k}{k^4\pi^4} \\ B_k = \dfrac{10 b_k}{k^2\pi^2} \end{cases}$$

Una sol. dell'eq. è per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k>0$

$$-\frac{10 b_k}{k^4\pi^4} + \frac{10 b_k}{k^2\pi^2} t$$

Quindi $LV_1 = \text{span}\left\{ e^{-k^2\pi^2 t} \right\} + \frac{10 b_k}{k^2\pi^2} t - \frac{10 b_k}{k^4\pi^4}$

e la soluzione del problema di Cauchy $(PC)_k$

è data risolvendo

$$c_k - \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} = d_k ;$$

cioè $c_k = d_k + \frac{10 b_k}{k^4\pi^4}$. Pertanto la soluzione cercata è:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(d_k + \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right) e^{-k^2\pi^2 t} + \frac{10 b_k}{k^2\pi^2} t - \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right] \cdot \sin(k\pi x) .$$

Verifichiamo se la serie converge in $(-1,1)\times(\varepsilon, +\infty)$. Criterio di Weierstrass:

$$\sup_{(-1,1)\times(\varepsilon,+\infty)} \left| \left[\left(d_k + \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right) e^{-k^2\pi^2 t} + \frac{10 b_k}{k^2\pi^2} t - \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right] \sin(k\pi x) \right|$$

$$\leq \left(d_k + \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right) e^{-k^2\pi^2 \varepsilon} + \frac{10 b_k \varepsilon}{k^2\pi^2} + \frac{10 b_k}{k^2\pi^4} .$$

Pertanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(d_k + \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right) e^{-k^2\pi^2 \varepsilon} + \frac{10 b_k \varepsilon}{k^2\pi^2} + \frac{10 b_k}{k^4\pi^4} \right] < +\infty$$

e quindi la serie converge totalmente (e quindi anche uniformemente.

2

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad , & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 5,\ x \in \mathbb{R}\} \\ u(x,y) = y^2 + x \quad , & \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 5,\ x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione alle derivate parziali di ordine uno pienamente non lineare.

La parametrizzazione di Γ è $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(s) = (s, 5)$.

Il sistema delle caratteristiche è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p_1 \\ \dot{y} = 2p_2 \\ \dot{z} = 2p_1^2 + 2p_2^2 \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases}$$

, mentre le condizioni iniziali sono

$$\begin{cases} x(0) = s \\ y(0) = 5 \\ z(0) = s + 25 \\ p_1(0) = 1 \\ p_2(0) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ infatti $p_1(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,5) = 1$ in Γ

e poiché $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1$ in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 5, x \in \mathbb{R}\}$

si ha $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ in Γ, da cui $p_2 = 0$

Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p_1 \\ \dot{y} = 2p_2 \\ \dot{z} = 2p_1^2 + 2p_2^2 \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases}$$

è non lineare e autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = 2p_1 \\ \dot{y} = 2p_2 \\ \dot{z} = 2p_1 + 2p_2^2 \\ p_1 = c_1 \\ p_2 = c_2 \end{cases}$$

con $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ (dalle condizioni iniziali. Pertanto

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 2 \\ p_1 = 1 \\ p_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 2t + s \\ y = 5 \\ z = 2t + s + 25 \\ p_1 = 1 \\ p_2 = 0 \end{cases}$$

soluzione parametrica

$$\begin{cases} x(0) = s \\ y(0) = 5 \\ z(0) = s + 25 \\ p_1(0) = 1 \\ p_2(0) = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo la forma cartesiana

$$z = x + 25 .$$

Verifica : $\frac{\partial}{\partial x}(x+25) = 1 \qquad \frac{\partial}{\partial y}(x+25) = 0$ soddisfa l'eq.

$$z(x,5) = x + 25 = \left(y^2 + x\right)\Big|_{y=5} = x + 25 .$$

\# 3

$$(PC)\begin{cases} y' = \dfrac{\alpha x^2+y}{1+\alpha x^2+(1-\alpha)y^2} \\ y(0)=0 \end{cases} \qquad \alpha\in[0,1]$$

$$f_\alpha(x,y)=\frac{\alpha x^2+y}{1+\alpha x^2+(1-\alpha)y^2} \qquad f_\alpha:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \quad \text{per ogni } \alpha\in[0,1]$$

e $f_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. Per il Teorema di Peano-Picard esiste ed è unica la soluzione del (PC) per ogni $\alpha\in[0,1]$.

Le soluzioni sono C^∞, perché $f_\alpha\in C^\infty$.

Per quanto riguarda l'esistenza globale

$$|f_\alpha(x,y)| = \left|\frac{\alpha x^2+y}{1+\alpha x^2+(1-\alpha)y^2}\right| \le \frac{|\alpha x^2+y|}{1+\alpha x^2+(1-\alpha)y^2}$$

$$\le \frac{\alpha x^2+|y|}{1+\alpha x^2+(1-\alpha)y^2} \le \frac{\alpha x^2}{1+\alpha x^2}+\frac{|y|}{1+\alpha x^2+(1-\alpha)y^2}$$

$$\le 1+\frac{|y|}{1+(1-\alpha)y^2}.$$

Se $0\le\alpha<1$ allora $|f_\alpha(x,y)|\le 1+\dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$

Se $\alpha=1$ allora $|f_1(x,y)|\le 1+|y|$

Quindi $f_\alpha(x,y)$ ha crescita al più lineare e dunque la soluzione è globale per ogni $\alpha\in[0,1]$ in $\mathbb{R}$.

Se $\alpha=0$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+y^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$$ allora $y \equiv 0$ è l'unica soluzione

Se $\alpha=1$

$$(PC)_0 \begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y}{1+x^2} \\ y(0)=0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+x^2}y + \dfrac{x^2}{1+x^2} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

l'equazione è lineare non omogenea a coeff. variabili

Studiamo l'eq. omogenea $y' = \frac{1}{1+x^2}y$ .. Possiamo calcolare l'integrale generale

$$V_1 = \text{span}\left\{ e^{\int^x \frac{1}{1+s^2}ds} \right\} = \text{span}\left\{ e^{\arctan x} \right\}$$

Cerchiamo una sol particolare nella forma

$\alpha(x)e^{\arctan x}$. Derivando si ha

$\alpha' e^{\arctan x} + \dfrac{\alpha}{1+x^2} e^{\arctan x}$. Sostituendo otteniamo

$$\alpha' e^{\arctan x} + \cancel{\frac{\alpha}{1+x^2} e^{\arctan x}} = \cancel{\frac{\alpha e^{\arctan x}}{1+x^2}} + \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\alpha' = \frac{x^2 e^{-\arctan x}}{1+x^2}$$

Quindi $\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{s^2}{1+s^2} e^{-\arctan s} ds$

$$LV_1 = \text{span}\{e^{\arctan x}\} + e^{\arctan x} \cdot \int_0^x \frac{s^2}{1+s^2} e^{-\arctan s} ds$$ 9

La soluzione del $(PC)_0$ con $\alpha = 0$ si ottiene imponendo che in 0 la soluzione sia nulla.

Quindi

$$c_1 e^{\arctan x} + e^{\arctan x} \int_0^x \frac{s^2}{1+s^2} e^{-\arctan s} ds$$

per $x=0$ è tale per cui si ha:

$$c_1 = 0$$

Finalmente la soluzione è

$$y = e^{\arctan x} \int_0^x \frac{s^2}{1+s^2} e^{-\arctan s} ds.$$

Nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{2}$

$$y'_{\frac{1}{2}}(0) = \frac{y(0)}{1 + \frac{1}{2} y^2(0)} = 0$$

$$y''_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{(x+y')(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2) - (\frac{1}{2}x^2+y)(x+yy')}{(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2)^2}$$

$$y''_{\frac{1}{2}}(0) = \frac{y'(0)(1+\frac{1}{2}y^2(0)) - y(0)\cdot y(0)y'(0)}{1}$$

$y''_{\frac{1}{2}}(0) = 0$. Quindi l'approssimazione della sol. è:

$$y_{\frac{1}{2}} = o(x^2), \quad x \to 0.$$

#4

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 \\ u(0,x) = e^{-x^2} \end{cases}$$

Il nucleo del calore è $K(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}}$.

Quindi $u(x,t) = \left(K(\cdot,t) * f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}} e^{-y^2} dy$