

**SECONDA PROVA PARZIALE DI COMPLEMENTI DI ANALISI
MATEMATICA LM**

12/01/2010

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

Esercizio 1 [9 p.ti]

Risolvere il seguente problema di Dirichlet con il metodo della separazione delle variabili

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 3x \sin t, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Esercizio 2 [9 punti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = u, & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 1, x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x, y) = x + y, & \text{in } \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 1, x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Dopo aver determinato la soluzione in forma parametrica ricavare l'espressione della stessa in forma cartesiana.

Esercizio 3 [6] Assegnato il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{25} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, & t > 0 \\ u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, 1] \\ u_t(x, 0) = g(x), \end{cases}$$

dove

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 4x - 1, & \text{se } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ -4x + 3, & \text{se } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 0, & \text{se } \frac{3}{4} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

calcolare il valore della soluzione u nel punto $(\frac{2}{10}, 3)$.

Esercizio 4 [6] Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + x, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

scrivere formalmente la successione di funzioni individuata dal Teorema di Banach Caccioppoli (punto fisso) che converge alla soluzione. In particolare scrivere esplicitamente i primi quattro termini della successione. Si chiede poi di scrivere la formula di Taylor della soluzione all'ordine quattro.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.