SECONDO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM

29/01/2010

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome..................................Nome...............................Mat.......................CdL.............

Esercizio 1 [9 p.ti]

Risolvere il seguente problema di Dirichlet con il metodo della separazione delle variabili

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5x^2 \sin(\pi y), \ \ 0 < x < 1, \ \ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = 0, \ \ u(1,y) = 0, \ \ y \in [0,1] \\ u(x,0) = 0, \ \ u(x,1) = 0, \ \ x \in [0,1]. \end{cases}$$

Esercizio 2 [9 punti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (2x+3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x-2y)\frac{\partial u}{\partial y} = u, \ \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y \geq 1, \ x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x,y) = 3x + y, \ \ \text{in } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ y = 1, \ x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Verificare l'esistenza di punti caratteristici per Γ e determinare la soluzione locale in forma parametrica.

Esercizio 3 [6]

Utilizzando la trasformata di Laplace risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + 4y'' = f, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

per una generica $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Laplace trasformabile. Calcolare poi esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy nel caso particolare in cui $f(t) = 3t + 5$.

Esercizio 4 [6] Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy^2 + x^2, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Determinare l'insieme in cui esiste ed è unica la soluzione e quale regolarità ha. Scrivere la successione iterativa del Teorema di Banach Caccioppoli per il problema in oggetto al quarto passo. Si chiede poi di scrivere la formula di Taylor della soluzione all'ordine tre per $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.