TERZO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM

12/02/2010

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome..................................Nome...............................Mat.......................CdL.............

Esercizio 1 [9 p.ti]

Risolvere il seguente problema di Dirichlet con il metodo della separazione delle variabili

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x\cos(\pi y), \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \\ u(0,y) = 0, \ u(1,y) = 0, \ y \in [0,1] \\ u(x,0) = 0, \ u(x,1) = 0, \ x \in [0,1]. \end{cases}$$

Esercizio 2 [9 punti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (5x-3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (4x+y)\frac{\partial u}{\partial y} = u^3, \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x \geq 2, \ y \in \mathbb{R}\}, \\ u(x,y) = x + 2y, \ \text{in } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x = 2, \ y \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Verificare l'esistenza di punti caratteristici per Γ e determinare la soluzione locale in forma parametrica.

Esercizio 3 [6]

Utilizzando la trasformata di Laplace risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{iv} + 7y''' = f, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0, \\ y'''(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

per una generica $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ Laplace trasformabile. Calcolare poi esplicitamente la soluzione del problema di Cauchy nel caso particolare in cui $f(t) = t$.

Esercizio 4 [6] Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3xy + x^2, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Determinare l'insieme in cui esiste ed è unica la soluzione e quale regolarità ha. Scrivere la successione iterativa del Teorema di Banach Caccioppoli per il problema in oggetto al quarto passo per $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Si chiede poi di scrivere la formula di Taylor della soluzione all'ordine tre per $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Determinare infine la soluzione esplicita del problema per $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.