

QUINTO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM

13/07/2010

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

Esercizio 1 [12 p.ti]

Risolvere il seguente problema di Dirichlet con il metodo della separazione delle variabili

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 10xt, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Esercizio 2 [8 punti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1, & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 5, x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x, y) = y^2 + x, & \text{in } \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 5, x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

determinando la soluzione locale in forma parametrica e in forma cartesiana.

Esercizio 3 [8]

Si consideri per ogni $\alpha \in [0, 1]$ la seguente famiglia di problemi di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y' = \frac{\alpha x^2 + y}{1 + \alpha x^2 + (1 - \alpha)y^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di α esistono soluzioni locali, per quali valori di α le soluzioni sono globali e quale regolarità hanno. Calcolare l'approssimazione della soluzione nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ all'ordine 2. Calcolare infine esplicitamente le soluzioni nel caso $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$.

Esercizio 4 [2] Sia

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = e^{-x^2}. \end{cases}$$

Scrivere la soluzione.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.