

SESTO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM

17/09/2010

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

**Esercizio 1** [11 p.ti]

Risolvere il seguente problema di Dirichlet con il metodo della separazione delle variabili

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 \sin(9\pi^2 t), & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(5\pi x), & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

**Esercizio 2** [8 punti]

Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = x + y, & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 7, x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x, y) = y, & \text{in } \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 7, x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

determinando la soluzione locale in forma parametrica e in forma cartesiana.

**Esercizio 3** [8 punti]

Si consideri per ogni  $\alpha \geq 0$  la seguente famiglia di problemi di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} y' = \frac{y + \alpha \sin y}{1 + \alpha x^2 + y^4} \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di  $\alpha$  esiste una soluzione locale, per quali valori di  $\alpha$  le soluzioni sono globali e quale regolarità hanno. Calcolare l'approssimazione della soluzione nel caso  $\alpha = 1$  all'ordine 2 in un intorno di 0. Calcolare infine esplicitamente la soluzione del problema nel caso  $\alpha = 0$ . Le risposte devono essere esaurientemente motivate.

**Esercizio 4** [3 punti] Sia

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = e^{-x} \\ u_t(x, 0) = \cos(x) \end{cases}$$

Scrivere una soluzione.

**N.B.** Gli studenti hanno a disposizione **3 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.