1# $u(x,t) = X(x)T(t)$. Procediamo cercando una soluzione del problema omogeneo mediante separazione di variabili

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \end{cases} \qquad \begin{cases} T'X = X''T \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \end{cases}$$

$\frac{T'}{T} = \lambda = \frac{X''}{X}$. Quindi per non ricadere nel caso banale risolviamo il problema di limiti seguente

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

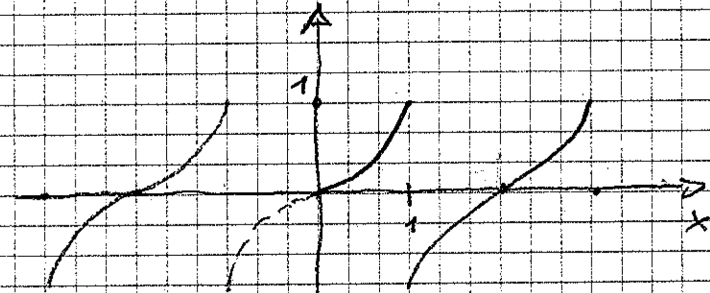
Nel caso $\lambda \geq 0$ non si ottengono autosoluzioni infatti:
se $\lambda > 0$ $\quad c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ quindi, imponendo le condizioni al contorno, si ha $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$ che ha come unica soluzione $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$;
se $\lambda = 0$, allora l'integrale generale è: $c_1 + c_2 x$ da cui segue, imponendo le condizioni al contorno
$c_1 = 0 \quad c_2 = 0$.

Nel caso $\lambda < 0$ $\quad c_1 \cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}x)$, da cui imponendo le condizioni al contorno si ha:
$c_1 = 0$ e $c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}) = 0$. Pertanto se $\sqrt{|\lambda|} = k\pi$ abbiamo soluzioni non banali con autovalori $\lambda_k = -k^2\pi^2$ e autosoluzioni $\sin(k\pi x)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Cerchiamo soluzioni del problema non omogeneo nella forma:
$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\pi x) \cdot T_k(t)$, con $T_k$ da determinare
Sostituendo, formalmente, nell'equazione non omogenea otteniamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)\, T_k' + k^2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(k\pi x)\, T_k = x^2 \sin(9\pi^2 t)$$ (2)

Supponiamo di sostituire a $x^2 \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(k\pi x)$ la sua serie di Fourier ottenuta a partire dalla funzione $x^2$ prolungata come funzione dispari su $[-1,1]$ e estesa periodicamente con periodo 2.




I coefficienti di tale sviluppo sono $b_k = 2\int_0^1 s^2 \sin(k\pi s)\,ds$ con $k \in \mathbb{N}$. In particolare

$$b_k = 2\left\{\left[-\frac{\cos(k\pi s)}{k\pi}\right]_{s=0}^{s=1} + 2\int_0^1 \frac{s\cos(k\pi s)}{k\pi}\,ds\right\} = \frac{2}{k\pi}\left(-(-1)^k + 1\right)$$

$$+\frac{4}{k\pi}\left\{\left[s\,\frac{\sin(k\pi s)}{k\pi}\right]_{s=0}^{s=1} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi s)\,ds\right\} = \frac{2}{k\pi}\left(1+(-1)^k\right) + \frac{4}{(k\pi)^3}\left[\cos k\pi s\right]_{s=0}^{s=1}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(1+(-1)^k\right) + \frac{4}{(k\pi)^3}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è pari} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

In tal caso otteniamo la seguente condizione

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k' + k^2\pi^2 T_k - b_k \sin(9\pi^2 t)\right) \sin(k\pi x) = 0$$

Richiediamo allora che per ogni $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$T_k' + k^2\pi^2 T_k = b_k \sin(9\pi^2 t)$$

$T_k' + k^2\pi^2 T_k = 0$ ha come integrale generale $V_1 = span\{e^{-k^2\pi^2 t}\}$

Cerchiamo una soluzione particolare nella forma (3)

$A_k \cos(9\pi^2 t) + B_k \sin(9\pi^2 t)$. Pertanto

$$-9\pi^2 A_k \sin(9\pi^2 t) + 9\pi^2 B_k \cos(9\pi^2 t) + k^2\pi^2 (A_k \cos(9\pi^2 t) + B_k \sin 9\pi^2 t)$$
$$= b_k \sin(9\pi^2 t)$$

Quindi

$$(-9\pi^2 A_k + B_k k^2\pi^2 - b_k)\sin(9\pi^2 t) + (9\pi^2 B_k + k^2\pi^2 A_k)\cos(9\pi^2 t) = 0$$

Da cui

$$\begin{cases} -9\pi^2 A_k + k^2\pi^2 B_k = b_k \\ k^2\pi^2 A_k + 9\pi^2 B_k = 0 \end{cases}$$

. Poiché $\det\begin{bmatrix} -9\pi^2 & k^2\pi^2 \\ k^2\pi^2 & 9\pi^2 \end{bmatrix} = -81\pi^4 - k^4\pi^4 \neq 0$

il sistema ha sempre soluzione e

$$A_k = -\frac{\det\begin{bmatrix} b_k & k^2\pi^2 \\ 0 & 9\pi^2 \end{bmatrix}}{\pi^4(81+k^4)} \quad e \quad B_k = -\frac{\det\begin{bmatrix} -9\pi^2 & b_k \\ k^2\pi^2 & 0 \end{bmatrix}}{\pi^4(81+k^4)}$$

da cui $A_k = -\dfrac{9b_k}{\pi^2(81+k^4)}$ e $B_k = \dfrac{k^2 b_k}{\pi^2(81+k^4)}$

Quindi per ogni $k>0$, $k\in\mathbb{N}$ l'integrale generale di $T_k' + k^2\pi^2 T_k = b_k \sin(9\pi^2 t)$ è

$$span\{e^{-k^2\pi^2 t}\} - \frac{9b_k}{\pi^2(81+k^2)}\cos(9\pi^2 t) + \frac{k^2 b_k}{\pi^2(81+k^2)}\sin(9\pi^2 t)$$

La soluzione cercata ha la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k e^{-k^2\pi^2 t} - \frac{9b_k}{\pi^2(81+k^2)}\cos(9\pi^2 t) + \frac{k^2 b_k}{\pi^2(81+k^2)}\sin(9\pi^2 t)\right)\sin(k\pi x)$$

e per $t=0$ deve soddisfare la condizione $u(x,0) = \sin(5\pi x)$

Sviluppando $\sin(5\pi x)$ su $[-1,1]$ otteniamo che i coefficienti di Fourier del cos sono tutti nulli, mentre quelli del

$\sin$, saranno tutti nulli ad eccezione di $k=5$; infatti

$$\int_{-1}^{1} \sin(5\pi s)\sin(k\pi s)\,ds = 0 \quad \text{per} \quad k \neq 5 \quad \text{perché}$$

(4)

$\{\sin(k\pi s)\}$ è ortogonale in $L^2([-1,1])$.

Se $k=5$

$$\int_{-1}^{1} \sin^2(5\pi s)\,ds = 2\int_0^1 \sin^2(5\pi s)\,ds = 2\int_0^1 \frac{1-\cos(10\pi s)}{2}\,ds$$

$$= 1 - \left[\frac{\sin(10\pi s)}{10\pi}\right]_{s=0}^{s=1} = 1.$$

Richiederemo allora che per $k \in \mathbb{N}$ $k \neq 5$

$$c_k - \frac{9 b_k}{\pi^2(81+k^2)} = 0 \quad , \text{da cui} \quad c_k = \frac{9 b_k}{\pi^2(81+k^2)}$$

e se $k=5$

$$c_k - \frac{9 b_k}{\pi^2(81+k^2)} = 1 \quad , \text{da cui} \quad c_5 = 1 + \frac{9 b_k}{\pi^2(81+k^2)}$$

Con questa scelta di $c_k$ la soluzione cercata è

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k e^{-k^2\pi^2 t} - \frac{9 b_k \cos(k\pi t)}{(81+k^2)\pi^2} + \frac{k^2 b_k \sin(k\pi t)}{(81+k^2)\pi^2} \right) \sin(k\pi x)$$

#2 L'equazione $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = x+y$ è lineare. (5)

Quindi il sistema delle caratteristiche assume la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = x+y \end{cases}$$

Cerchiamo l'integrale generale del sistema $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$

La matrice associata è $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Gli autovalori sono determinati

risolvendo $\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2+1=0$ $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$

Per determinare $\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)$ risolviamo il sistema

$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Con il metodo di Gauss otteniamo

$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pertanto una base per $\operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)$

è $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ cioè $v_1 = 1$ e $v_2 = i$. Quindi

$\operatorname{Ker}(A-iI) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right\}$

Analogamente risolvendo

$\begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, otteniamo $\operatorname{Ker}(A+iI) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right\}$

Risulta che $e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni in campo complesso. Cerchiamo un sistema fondamentale reale.

$$w_1 = \frac{e^{it}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} + e^{-it}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}}{2} \quad e \quad w_2 = \frac{e^{it}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} - e^{-it}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}}{2i}$$ 6

$$w_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos t\\ -2\sin t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}; \quad w_2 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix}2i\sin t\\ 2i\cos t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

Pertanto $\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$ è una matrice fondamentale

Le condizioni poste dal problema di Cauchy sono

$x(0) = 5 \quad e \quad y(0) = 7$

Quindi $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\ 7\end{bmatrix}$ cioè $c_1 = 5$ e $c_2 = 7$

Inoltre

$$\dot{z} = 5\cos t + 7\sin t - 5\sin t + 7\cos t$$

con $z(0) = 7$. Pertanto $\begin{cases}\dot{z} = (5+7)\cos t + (7-5)\sin t\\ z(0) = 7\end{cases}$

$z(t) = (5+7)\sin t - (7-5)\cos t + M \quad e \quad z(0) = (5-7) + M = 7$

$M = 14 - 5$

$$\begin{cases} x = 5\cos t + 7\sin t\\ y = -5\sin t + 7\cos t\\ z = (5+7)\sin t - (7-5)\cos t + 14 - 5\end{cases}$$

Posto $5 = \rho\cos\alpha \quad e \quad 7 = \rho\sin\alpha$

$\rho = \sqrt{5^2 + 49}$

allora $x=\sqrt{s^2+49}\,(\cos\alpha\cos t+\sin\alpha\sin t)$

$y=\sqrt{s^2+49}\,(-\cos\alpha\sin t+\sin\alpha\cos t)$

$$x=\sqrt{s^2+49}\,\cos(t-\alpha)$$

$$y=\sqrt{s^2+49}\,\sin(t-\alpha)$$

Pertanto $\dfrac{y}{x}=tg(t-\alpha)$ e $x^2+y^2=s^2+49$

e

$$z(x,y)=\left(7+\sqrt{x^2+y^2-49}\right)\sin\beta(x,y)-\left(7-\sqrt{x^2+y^2-49}\right)\cos\beta(x,y)+14-\sqrt{x^2+y^2-49}$$

dove $\beta=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}+\alpha\right)$ con $\alpha=\operatorname{arctan}\dfrac{7}{\sqrt{x^2+y^2-49}}$.

---

3#

$$\begin{cases} y'=\dfrac{y+\alpha\sin y}{1+\alpha x^2+y^4} & \alpha\geq 0\\ y(0)=\alpha \end{cases}$$

$f_\alpha(x,y)=\dfrac{y+\alpha\sin y}{1+\alpha x^2+y^4}$, $f_\alpha:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ $f_\alpha\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Infatti $1+\alpha x^2+y^4>0$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

Dal Teorema di Peano-Picard segue che esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy per ogni $\alpha\geq 0$. Inoltre le soluzioni dell'eq. differenziale sono $C^\infty$ perché $f_\alpha\in C^\infty$.

Le soluzioni sono globali, cioè sono definite su $\mathbb{R}$.

Infatti

$$|f_\alpha|\leq\frac{|y|+\alpha}{1+\alpha x^2+y^4}\leq|y|+\alpha \qquad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

la crescita di $f_\alpha$ è al più lineare.

Se $\alpha=1$



$$\begin{cases} y' = \dfrac{y+\sin y}{1+x^2+y^4} \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Quindi $y'(0) = \dfrac{1+\sin 1}{2}$.

$$y'' = \frac{(y'+y'\cos y)(1+x^2+y^4) - (y+\sin y)(2x+4y^3y')}{(1+x^2+y^4)^2}$$

$$y''(0) = \frac{(1+\sin 1)(1+\cos 1) - 2(1+\sin 1)^2}{4} = \frac{1+\sin 1}{4}(1+\cos 1 - 2 - 2\sin 1)$$

$$= -\frac{1+\sin 1}{4}(1+2\sin 1 - \cos 1)$$

Quindi

$$y(x) = 1 + \frac{1+\sin 1}{2}x - \frac{1+\sin 1}{4}(1+2\sin 1 - \cos 1)x^2 + o(x^2).$$

Infine se $\alpha=0$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+x^2+y^4} \\ y(0)=0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione $y=0$.

# 4

9

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = e^{-x} \\ u_t(x,0) = \cos x \end{cases}$$

Ricordando la formula di D'Alambert $(c = 1)$

$$u(x,t) = \frac{e^{x+t} + e^{x-t}}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos s \, ds$$

$$= \frac{e^{x+t} + e^{x-t}}{2} + \frac{1}{2}\left(\sin(x+t) - \sin(x-t)\right)$$