Correzione della prima prova parziale del 13/11/2009

ES. 1

$$\begin{cases} (x+2y)\dfrac{\partial u}{\partial x} + (2x+3y)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u \quad , & U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x \geq 4\} \\ u(x,y) = x \quad , & \Gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=4,\ y\in\mathbb{R}\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+3y \\ z' = 3z \end{cases}$$

Sistema delle caratteristiche

$s \longmapsto (4, s)$ parametrizza Γ per $s\in\mathbb{R}$.

$x(0)=4$, $y(0)=s$, $z(0)=4$ $\quad \left(f=4,\ g(s)=s,\ h(s)=4 \right)$

Risolviamo il problema di Cauchy

$$(P.C)\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+3y \\ z' = 3z \\ x(0)=4,\ y(0)=s,\ z(0)=4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \ \det(A-\lambda I) = 0 \iff$$

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(3-\lambda)-4=0 \iff (\lambda-1)(\lambda-3)-4=0$$

$$\lambda^2-4\lambda+3-4=0 \iff \lambda^2-4\lambda-1=0 \quad \lambda_{1,2} = 2\pm\sqrt{4+1} = \begin{cases} 2+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\left(A-(2+\sqrt{5})I\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2-\sqrt{5}, & 2 \\ 2 & 3-2-\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{5}, & 2 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(A-(2+\sqrt{5})I\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}\left(A-(2+\sqrt{5})I\right) = \mathbb{C}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(A-(2-\sqrt{5})I\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} \,, & 2 \\ 2 \,, & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \,, \quad \begin{bmatrix} -1+\sqrt{5} & 2 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1+\sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \iff 2v_1 + (1+\sqrt{5})v_2 = 0$$

$$\mathrm{Ker}\left(A-(2-\sqrt{5})I\right) = \mathbb{C}\begin{bmatrix} -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una matrice fondamentale è $\Phi(t) = \begin{bmatrix} -e^{(2+\sqrt{5})t}\frac{\sqrt{5}-1}{2} \,, & -e^{(2-\sqrt{5})t}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ e^{(2+\sqrt{5})t} \,, & e^{(2-\sqrt{5})t} \end{bmatrix}$

Pertanto la soluzione del P.C. $\begin{cases} x' = x+2y \\ y' = 2x+3y \\ x(0)=4 \,, \; y(0)=s \end{cases}$ è

quella per cui $\Phi(0)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ s \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 4 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

$$c_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} 4 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ s & 1 \end{bmatrix}}{\det\phi(0)} = \frac{4+s\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 4+s\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$c_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 4 \\ 1 & s \end{bmatrix}}{1} = -s\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 4 \,,$$ da cui segue

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \Phi(t)\begin{bmatrix} 4+\frac{1+\sqrt{5}}{2}s \\ -4+\frac{1-\sqrt{5}}{2}s \end{bmatrix}.$$

D'altra parte $\begin{cases} z' = 3z \\ z(0)=4 \end{cases}$ ha come soluzione

$z(t) = 4e^{3t}$, pertanto otteniamo che la sol del (P.C.) è

$$(*) \begin{cases} x = \left(4+\frac{1+\sqrt{5}}{2}s\right)e^{(2+\sqrt{5})t}\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \left(4-\frac{1-\sqrt{5}}{2}s\right)e^{(2-\sqrt{5})t}\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y = \left(4+\frac{1+\sqrt{5}}{2}s\right)e^{(2+\sqrt{5})t} + \left(-4+\frac{1-\sqrt{5}}{2}s\right)e^{(2-\sqrt{5})t} \\ z = 4e^{3t} \end{cases}$$

$$J = \det\begin{bmatrix} 4+2s & , & 8+3s \\ 0 & , & 1 \end{bmatrix} = 4+2s \neq 0 \iff s \neq -2$$

Quindi la soluzione $*$ di (PC) è unica e di classe C^1 in un intorno di ogni punto di Γ diverso da $(4,-2)$.

Se consideriamo $(4,-2) \in \Gamma$, allora dobbiamo verificare se è caratteristico, cioè se per $(x_0, y_0, z_0) = (4,-2,4)$

$$rg\begin{pmatrix} a(x_0,y_0,z_0), & b(x_0,y_0,z_0), & c(x_0,y_0,z_0) \\ f'(0) & g'(0) & h'(0) \end{pmatrix} = 1$$

In particolare

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Quindi non è caratteristico. Pertanto in un intorno del punto $(4,-2)$ non possiamo aspettarci che vi sia una sola soluzione e che essa sia di classe C^1.

<u>ES 2</u> Calcolare $\mathcal{L}(e^{(3+2i)t})$

$$\mathcal{L}(e^{(3+2i)t})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{(3+2i)t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-3-2i)t}\, dt$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left[-\frac{1}{s-3-2i} e^{-(s-3-2i)t} \right]_{t=0}^{t=M}$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left(-\frac{1}{s-3-2i} e^{-(s-3-2i)M} + \frac{1}{s-3-2i} \right)$$

ma poiché $\left| -\frac{1}{s-3-2i} e^{-(s-3-2i)M} \right| = \frac{1}{|s-3-2i|} e^{-(\operatorname{Re}s-3)M}$

Se $\operatorname{Re}s > 3$, allora $\mathcal{L}(e^{(3+2i)t})(s) = \frac{1}{s-3-2i}$ con

$$\sigma\left[e^{(3+2i)t}\right] = 3$$

ES 3 Sia $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{\alpha x^2+3y^2+1} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$, $\alpha \geq 0$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\alpha x^2+3y^2+1}$, perché

$\dfrac{x^2}{\alpha x^2+3y^2+1}$ è def per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, se $\alpha \geq 0$.

Inoltre $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi dal Teorema di Peano-Picard segue l'esistenza di una ed una sola soluzione locale nell'intorno di (x_0,y_0). Inoltre le soluzioni saranno C^∞, perché $f\in C^\infty$.

Poiché $|f(x,y)| = \dfrac{x^2}{\alpha x^2+3y^2+1} \leq \dfrac{x^2}{\alpha x^2} = \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$

si ha che per $\alpha>0$ e per ogni $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ la soluzione è globale, cioè è def. su tutto $\mathbb{R}$.

Infatti f ha crescita al più lineare. Se $\alpha = 0$ non possiamo applicare il Teorema. Tuttavia

$y' = \dfrac{x^2}{3y^2+1}$ è un'eq. a variabili separabili.

Quindi possiamo risolvere $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{3y^2+1} \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$, perché

$3y_0^2+1 \neq 0$. Infatti la sol. è data implicitamente da

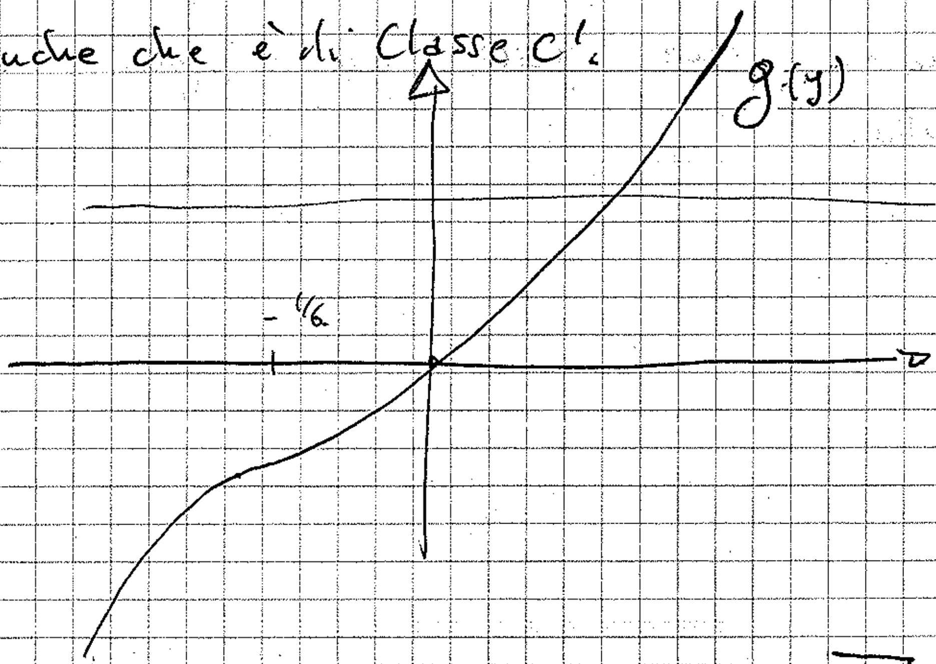
$$\int_{y_0}^{y}(3s^2+1)\,ds = \int_{x_0}^{x} \tau^2 d\tau \iff \left[s^3+s\right]_{s=y_0}^{s=y} = \left[\frac{1}{3}\tau^3\right]_{\tau=x_0}^{\tau=x}$$

$$y^3+y-y_0^3-y_0 = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x_0^3.$$ [Non richiesto

Se consideriamo $g(y)=y^3+y$ allora g è strettamente crescente e nulla in 0. Quindi per ogni $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e per ogni $x\in\mathbb{R}$ $y_0^3+y_0+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x_0^3 \in \mathbb{R}$.

Pertanto $\forall x\in\mathbb{R}$ esiste un solo $y\in\mathbb{R}$ t.c. $x \mapsto y(x)$

cioè esiste una soluzione def per ogni $x\in\mathbb{R}$. Si dimostra anche che è di classe C^1.



Quindi è globale anche per $\alpha = 0$.

Se $(x_0, y_0) = (0,1)$ e $\alpha = 1$.

possiamo calcolare un'approssimazione della soluzione.

$y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 0$, $\quad y''(x) = \dfrac{2x(x^2+3y^2+1) - x^2(2x+6yy')}{(x^2+3y^2+1)^2}$

$y''(0) = 0$, quindi $y(x) = 1 + o(x^2)$, $\quad x \to 0$.

Ciò è possibile perché $f \in C^\infty$ quindi anche la soluzione è C^∞.

Nel caso in cui si abbia il problema, $\alpha \geq 0$

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{\alpha x^2 + 3y^2 + 1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è immediato verificare che l'unica soluzione è, per ogni α, $y \equiv 0$. D'altra parte $\dfrac{y^2}{\alpha x^2 + 3y^2 + 1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

Quindi possiamo scrivere la soluzione per serie

$y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'' = \dfrac{2yy'(\alpha x^2+3y^2+1) - y^2(2\alpha x + 6yy')}{(\alpha x^2+3y^2+1)^2}$

$y''(0) = 0$

Quindi scopriamo che $y \equiv 0$ perché ogni derivata si annulla.