PROVA PARZIALE DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM

13/11/2009

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome..................................Nome...............................Mat.......................CdL.............

Esercizio 1 [8 p.ti]

Risolvere il seguente problema di Cauchy con il metodo delle caratteristiche

$$\begin{cases} (x+2y)\frac{\partial u}{\partial x} + (2x+3y)\frac{\partial u}{\partial y} = 3u, \ \ U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x \geq 4\} \\ u(x,y) = x, \quad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x = 4, \quad y \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

In particolare si chiede di:

(i) scrivere in forma parametrica la soluzione in forma parametrica;
(ii) individuare, se esistono punti caratteristici;
(iii) precisare per quali punti esiste una soluzione locale C^1 e per quali punti, se esistono, non possiamo aspettarci una soluzione C^1.

(**La domanda (i) del primo esercizio è valutata quattro punti, le rimanenti due domande del primo esercizio sono valutate due punti ciascuna**).

Esercizio 2 [2 punti]

Calcolare la trasformata di Laplace della funzione $t \to e^{(3+2i)t}$.

Esercizio 3 [8]

Sia assegnata la seguente famiglia di problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^2}{\alpha x^2 + 3y^2 + 1}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\alpha \geq 0$ è un parametro reale fissato. Studiare qualitativamente le soluzioni rispondendo alle seguenti domande.

(i) Per quali $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste una unica soluzione locale?
(ii) Quale regolarità avranno le soluzioni?
(iii) Per quali α le soluzioni del problema sono globali?

Inoltre:

(iv) se $\alpha = 1$ e $(x_0, y_0) = (0, 1)$ determinare una funzione approssimante la soluzione a meno di un errore che sia "o" di x^2;
(v) se $\alpha = 0$ e $(x_0, y_0) = (0, 1)$ calcolare esplicitamente la soluzione.

(vi) Dopo aver risposto a tutti i punti da (i) a (v) si chiede di calcolare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy, per $\alpha \geq 0$,

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2}{\alpha x^2 + 3y^2 + 1}. \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

(Le domande da (i) a (iii) e (v) del terzo esercizio sono valutate un punto ciascuna, le rimanenti domande (iv) e (vi) valgono due punti ciascuna).

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **2 h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.