**Elenco ufficioso degli argomenti svolti nel corso di Complementi di Analisi Matematica LM**

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Chimica e di processo (4 crediti). Anno Accademico 2010/2011.
(Prof. F. Ferrari)

ANALISI REALE

Definizione di spazio vettoriale e di applicazione lineare tra spazi vettoriali. La definizione di base di uno spazio vettoriale. La definizione di autovalore e di autovettore di una applicazione lineare. La definizione di autovalore e di autovettore di una matrice. Definizione di curva regolare e di superficie regolare. Superficie regolare come insieme di livello e come parametrizzazione. Il Teorema di invertibilità locale. Definizione di misura di Lebesgue. Definizione di funzione misurabile. Cenni inerenti la definizione dell' integrale di Lebesgue e di funzione sommabile. Principali differenze tra l'integrale di Lebesgue e l'integrale generalizzato di Riemann. Il teorema della convergenza dominata.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Definizione di equazione alle derivate parziali. Equazioni alle derivate parziali di ordine uno in due variabili: il metodo delle caratteristiche per operatori lineari, semilineari e fully nonlinear. Punti caratteristici ed esistenza di soluzioni classiche del problema di Cauchy per equazioni alle derivate parziali di ordine uno.

Il problema di Cauchy per equazioni alle derivate parziali di ordine due. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali lineari di ordine due mediante le rette caratteristiche: caso ellittico, iperbolico e parabolico. L'equazione del calore, l'equazione delle onde e l'equazione di Laplace in due variabili. Definizione di problema al bordo, in due variabili, per l'equazione del calore e di problema di Dirichlet. Il nucleo del calore. La soluzione del problema di Cauchy su un semipiano per l'operatore del calore come convoluzione del nucleo del calore con la funzione assegnata per $t = 0$.

La formula di D'Alambert per l'equazione delle onde. La nozione di retta caratteristica nella soluzione dell'equazione delle onde. Il teorema dei quattro punti per l'equazione delle onde. Costruzione di soluzioni per equazione delle onde con dati al bordo e condizione sulla derivata nel tempo su domini limitati. Il metodo della separazione delle variabili per le equazioni alle derivate parziali lineari a coefficienti costanti di ordine due omogenee e non omogenee.

Cenni alla risoluzione di equazioni alle derivate parziali con l'ausilio della trasformata di Laplace e la trasformata di Fourier.

Il principio del massimo per l'equazione del calore. Applicazioni del principio del massimo alle soluzioni classiche delle equazioni di Laplace e del calore su domini limitati: unicità delle soluzioni classiche.

SPAZI METRICI

Definizione di spazio metrico. Definizione di distanza. Esempi di distanze. Definizione di palla metrica. Lo spazio metrico delle funzioni $C([a,b])$ con la distanza del max. Definizione di successione convergente in uno spazio metrico. Definizione di successione di Cauchy in uno spazio metrico. Definizione di spazio metrico completo. Esempi di spazi metrici completi e non completi: $\mathbb{Q}$ non è completo rispetto all'usuale distanza del valore assoluto, $\mathbb{R}$ è completo rispetto all'usuale distanza del valore assoluto, $C([a,b])$ è completo rispetto alla distanza del max. Definizione di contrazione. Il Teorema di Banach Caccioppoli. La nozione di completamento di uno spazio metrico.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Definizione di problema di Cauchy e di soluzione di un problema di Cauchy. Equivalenza tra l'esistenza della soluzione locale di un problema di Cauchy e la soluzione dell'equazione integrale di Volterra. Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari di ordine uno. Metodo della variazione delle costanti. Equazioni differenziali omogenee. Equazioni differenziali esatte. Regolarità delle soluzioni in relazione alla regolarità dei coefficienti in sistemi di equazioni differenziali di ordine uno. Definizione di soluzione massimale di un problema di Cauchy in sistemi di equazioni differenziali di ordine uno. Definizione di soluzione globale di un problema di Cauchy in sistemi di equazioni differenziali di ordine uno. Condizioni sufficienti per l'esistenza di una soluzione globale del problema di Cauchy in sistemi di equazioni differenziali di ordine uno. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali di ordine uno.

SPAZI NORMATI

Definizione di norma. Esempi di spazi vettoriali normati. Definizione di successione convergente in uno spazio normato. Definizione di serie convergente in uno spazio normato. Definizione di successione di Cauchy in uno spazio normato. Spazi di Banach. Definizione di serie totalmente convergente.

SPAZI CON PRODOTTO INTERNO

Definizione di spazio vettoriale con prodotto interno. La disuguaglianza di Cauchy Schwarz. Norma associata al prodotto interno. Esempi di spazi con prodotto interno: $C([a,b],\mathbb{C})$ con il prodotto di $L^2$. Spazi di Hilbert. La definizione di $L^2([a,b],C)$ come completamento di $C([a,b],\mathbb{C})$ rispetto alla distanza indotta dal prodotto interno di $L^2$. Definizione di vettori ortogonali in uno spazio con prodotto interno. Definizione di famiglia di vettori ortogonale e ortonormale rispetto ad un prodotto interno. Un sistema ortogonale di vettori in uno spazio vettoriale è libero. La definizione di spazio vettoriale ortogonale. Esempi di sistemi ortogonali di vettori: $C([a,b],\mathbb{C})$ dotato del prodotto interno di $L^2$ e $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Il Teorema di Pitagora in $L^2$. Il Teorema della proiezione ortogonale su uno spazio vettoriale. Cenni alla matrice di Gram. La disuguaglianza di Bessel e l'uguaglianza di Parseval per le serie di Fourier. La proiezione ortogonale di una funzione in $C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ rispetto alla famiglia reale di vettori ortogonali $\{\frac{1}{2},\cos(x),\sin(x),\ldots,\cos(nx),\sin(nx),\ldots\}$ per il prodotto interno in $L^2$.

SERIE DI FOURIER E CENNI ALL'ANALISI DI FOURIER

Cenni agli spazi $L^p(\Omega)$ e la norma $L^p(\Omega)$, $p>1$. Il caso $L^2(\Omega)$ come esempio di spazio con prodotto interno. I Teoremi sulla convergenza dominata in $L^1(\Omega)$. La definizione di convoluzione in $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definizione di funzione continua a tratti. Definizione di $P_\tau(\mathbb{R})$. Definizione di serie di Fourier in $L^2([-\pi,\pi])$ e nel caso $L^2([-L,L])$. La convergenza in $L^2$ delle serie di Fourier. La disuguaglianza di Bessel per le serie di Fourier. L'uguaglianza di Parseval per le serie di Fourier. I coefficienti di Fourier su un intervallo dimezzato. Serie di Fourier per funzioni pari e per funzioni dispari. La condizione (D). Condizioni sufficienti per la convergenza puntuale della serie di Fourier. Condizioni sufficienti per la convergenza totale e uniforme delle serie di Fourier.

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

Definizione di successione di funzioni. Definizione di successione di funzioni puntalmente convergente. Definizione di successione di funzioni uniformemente convergente. Le successioni uniformemente convergenti sono anche puntualmente convergenti. Esistono successioni puntualmente convergenti che non sono uniformemente convergenti. Criterio necessario e sufficiente per la convergenza delle successioni di funzioni uniformemente convergenti. Proprietà di scambio dei limiti per le successioni uniformemente convergenti: le successioni di funzioni continue, su intervalli compatti, uniformemente convergenti convergono a funzioni continue, l'integrale di una funzione limite di una successione di funzioni continue su intervalli compatti è il limite della successione degli integrali delle funzioni continue. Definizione di serie di funzioni. Serie di funzioni totalmente convergenti. Convergenza totale delle serie implica convergenza uniforme delle stesse. Il criterio di Weierstrass. Teorema di scambio della derivazione di funzioni con la serie.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE UNO

Definizione di sistema di equazioni differenziali lineari. Sistemi lineari omogenei e non omogenei. Definizione di funzione a valori matrice. Definizione di sistema fondamentale di soluzioni per un sistema lineare omogeneo. Il sistema fondamentale di soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari n equazioni omogeneo è uno spazio vettoriale di dimensione n. La matrice esponenziale. Definizione di sistema fondamentale di soluzioni. Definizione di matrice fondamentale di soluzioni. Il caso delle matrici a coefficienti costanti. Cenni sulla costruzione della matrice fondamentale nel caso di matrici a coefficienti costanti. L'integrale generale di un sistema lineare non omogeneo è una varietà lineare. Il metodo della variazione delle costanti di Lagrange per la costruzione di una soluzione particolare del sistema di equazioni lineari di ordine uno n equazioni. Costruzione di soluzioni per equazioni differenziali lineari di ordine 2, omogenee, a coefficienti costanti con riferimento a autospazi, autovalori e autospazi generalizzati della matrice $2 \times 2$ a coefficienti costanti. Cenni del modello non lineare di Lotka-Volterra preda-predatore. Ricerca di un integrale primo per il sistema di Lotka-Volterra.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DI ORDINE 2

Definizione di sistema fondamentale di soluzioni per un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine 2. Il sistema fondamentale di soluzioni per un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine 2 è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Equazioni differenziali di ordine 2 in forma normale si possono ricondurre a un sistema di equazioni di ordine uno 2 equazioni.

TRASFORMATA DI LAPLACE

Definizione di funzione Laplace trasformabile. Definizione di ascissa di convergenza. Funzioni a crescita esponenziale. La trasformata di Laplace della funzione $t \to e^{at}$. Trasformata di Laplace delle funzioni $\sin, \cos, \sinh, \cosh$. Proprietà di linearità della trasfomata di Laplace. Convoluzione di segnali e trasformata di Laplace della convoluzione di segnali. La trasformata di Laplace della derivata di una funzione. Formule del ritardo per la trasformata di Laplace. Applicazione della trasformata di Laplace per la risoluzione di problemi di Cauchy di equazioni differenziali omgenee e non omogenee.

TRASFORMATA DI FOURIER

Definizione di supporto di una funzione. Definizione di $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ delle funzioni a decrescita rapida. Definizione della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Definizione della trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$. Proprietà di linearità della trasformata di Fourier. La trasformata di Fourier della derivata di ordine $\alpha$ per una funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La derivata di ordine $\beta$ della trasformata di Fourier per funzioni di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier di una funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è una funzione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier da $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ è lineare. La trasformata di Fourier della convoluzione di funzioni. Cenni all'estensione della trasformata di Fourier a $L^2(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier è invertibile in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e in $L^2(\mathbb{R})$. La trasformata di Fourier di $\chi_{[-a,a]}$ funzione caratteristica. L'uguaglianza di Parseval e il calcolo di alcuni integrali in $L^2$. L'antitrasformata di Fourier. Applicazioni della trasformata di Fourier al problema di Cauchy per l'equazione del calore su un semipiano.