#1

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin(4x\pi), & (x,t)\in(0,4)\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x\in[0,4] \\ u(0,t) = 0, & t\geq 0 \\ u(4,t) = 0, & t\geq 0 \end{cases}$$

dove $g:[0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 2x & 0\leq x\leq 2 \\ 8-2x & 2 < x \leq 4 \end{cases}$

Consideriamo il problema omogeneo $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Cerchiamo delle soluzioni mediante separazione di variabili

$u = X(x)T(t)$. Sostituendo si ottiene

$T'X = 16\,T X''$; quindi $\dfrac{T'}{16T} = \dfrac{X''}{X} = \lambda$ costante

Poiché $u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \longrightarrow X(0) = 0$ e

$u(4,t) = X(4)T(t) = 0 \longrightarrow X(4) = 0$

Risolviamo il problema ai limiti $\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(4) = 0 \end{cases}$

Se $\lambda < 0$, allora $V_2 = \mathrm{span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|}x), \sin(\sqrt{|\lambda|}x)\}$

e se $X(x) = c_1\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$, allora

$X(0) = c_1 = 0$

$X(4) = c_2\sin(\sqrt{|\lambda|}4) = 0 \longrightarrow 4\sqrt{|\lambda|} = k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$

$|\lambda| = \left(\dfrac{k\pi}{4}\right)^2$ cioè $\lambda = -\dfrac{k^2\pi^2}{16}$. Inoltre

$X_k(x) = c_k\sin\left(\dfrac{k\pi}{4}x\right)$.

Se $\lambda = 0$ $V_2 = \{c_1 + c_2 x;\ c_1, c_2\in\mathbb{R}\}$ da cui segue

$0 = X(0) = c_1$ e $0 = X(4) = 4c_2$, cioè $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$

Quindi c'è la sola soluzione banale

Se $\lambda > 0$ $\quad V_2 = \left\{ c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$,

da cui segue $\quad 0 = X(0) = c_1 + c_2 \quad$ e $\quad 0 = X(4) = c_1 e^{4\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-4\sqrt{\lambda}}$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ e^{4\sqrt{\lambda}} c_1 + e^{-4\sqrt{\lambda}} c_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{ma} \quad \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{4\sqrt{\lambda}}, & e^{-4\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix} = 0$$

se e solo se $\quad e^{-4\sqrt{\lambda}} - e^{4\sqrt{\lambda}} = 0 \iff 1 = e^{8\sqrt{\lambda}} \iff$

$\lambda = 0$. (che non è appartenente a questo caso)

Concludiamo che le soluzioni sono $u_k = T_k(t) \sin\left(\frac{k\pi}{4} x\right)$

con T_k da determinare.

Quindi volendo risolvere l'equazione non omogenea, cerchiamo soluzioni nella forma $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Sostituendo si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k' \sin\left(\frac{k\pi}{4} x\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \pi^2 T_k \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) + t \sin(4\pi x).$$

Se prolunghiamo la funzione $\sin(4\pi x)$ come funzione dispari su $[-4, 0[$ otteniamo che con uno sviluppo di Fourier su $[-4, 4]$, $\tau = 8$

$$\sin(4\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)$$

con $\displaystyle b_k = \frac{2}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx = \frac{1}{4} \int_{-4}^{4} f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) dx \quad$ perché $f(x)$ è dispari.

Tuttavia $f(x) = \sin(4\pi x)$, quindi

$b_k = 0$ se $k \neq 16$, perché $\sin(4\pi x) \in \left\{ \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$

e questi vettori sono ortogonali in $L^2([-4, 4])$)

mentre $b_{16} = \frac{1}{2} \int_0^4 \sin^2(4\pi x)\, dx = 1$

Cioè $\sin(4\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)$, con

$b_k = 0$ se $k \neq 16$ e $b_{16} = 1$.

Pertanto dobbiamo richiedere che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(T_k' + k^2\pi^2 T_k - t b_k\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) = 0$$

Ciò accade se $T_k' + k^2\pi^2 T_k = t b_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

D'altra parte la soluzione cercata deve soddisfare anche $u(x,0) = g(x)$. Quindi sviluppando in serie di Fourier la funzione g prolungata come funzione dispari si ottiene

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin \frac{k\pi x}{4}$$

$d_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{T/2} \tilde{g}(x) \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx$ dove $\tilde{g}$ è la

funzione ottenuta mediante prolungamento dispari di g;

inoltre $d_k = \frac{1}{2} \int_0^4 g(x) \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^2 2x \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx + \int_2^4 (8-2x) \sin \frac{k\pi x}{4}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{4}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right) \cdot 2x \right]_{x=0}^{x=2} + \frac{8}{k\pi} \int_0^2 \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{4}{k\pi} (8-2x) \cos \frac{k\pi x}{4} \right]_{x=2}^{x=4} - \frac{8}{k\pi} \int_2^4 \cos \frac{k\pi x}{4}\, dx \right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\cancel{-\frac{4^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}} + \frac{32}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi x}{4}\right]_{x=0}^{x=2} + \cancel{\frac{4^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}}\right.$$

$$\left. - \frac{32}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi x}{4}\right]_{x=2}^{x=4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{k^2\pi^2}\left(\sin\frac{k\pi}{2} + \sin\frac{k\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{32}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} \qquad (\text{se } k \text{ è pari } d_k = 0)$$

Si tratta allora di risolvere per $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

$$\begin{cases} T'_k + k^2\pi^2 T_k = t b_k \\ T_k(0) = d_k \end{cases}$$

Se $k \neq 16$ il problema è $\begin{cases} T'_k + k^2\pi^2 T_k = 0 \\ T_k(0) = d_k \end{cases}$

da cui $T_k = d_k e^{-k^2\pi^2 t}$. In particolare se

$k \neq 16$ e pari $T_k = 0$.

Se $k = 16$ $\begin{cases} T'_{16} + 16^2\pi^2 T_{16} = t \\ T_{16}(0) = d_{16} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} T'_{16} + 16^2\pi^2 T_{16} = t \\ T_{16}(0) = 0 \end{cases}$

$LV_2 = V_1 + \psi$ dove ψ è sol $T'_{16} + 16^2\pi^2 T_{16} = t$

Quindi applicando il metodo per simpatia cerchiamo una sol nella forma $\psi = At + B$ ottenendo $\psi' = A$

$$A + 16^2\pi^2(At + B) = t \quad ; \quad A\,16^2\pi^2 = 1 \quad e \quad A + 16^2\pi^2 B = 0$$

cioè $A = \frac{1}{16^2\pi^2}$ e $B = -\frac{1}{16^4\pi^4}$, da cui segue

$\psi = \frac{1}{16^2\pi^2}t - \frac{1}{16^4\pi^4}$. Pertanto da $ce^{-16^2\pi^2 t} + \psi$

segue $c = \frac{1}{16^4\pi^4}$ e $T_{16} = \frac{1}{16^4\pi^4}e^{-16^2\pi^2 t} + \frac{1}{16^2\pi^2}t - \frac{1}{16^4\pi^4}$

Mentre se $k \neq 16$
$$\begin{cases} T_k' + k^2\pi^2 T_k = 0 \\ T_k(0) = d_k \end{cases}$$

cioè $T_k(t) = d_k\, e^{-k^2\pi^2 t}$.

Pertanto

$$u(x,t) = \sum_{\substack{n=1 \\ k\neq 16}}^{\infty} d_k\, e^{-k^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right) + \left(\frac{e^{-16\pi^2 t}-1}{16^4\pi^4} + \frac{t}{16^2\pi^2}\right)\sin(4\pi x)$$

#2

$$\begin{cases} y''' + 16y'' = \cos(4x) \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}y''' + 16\mathcal{L}y'' = \mathcal{L}\cos(4x)$$

$$s^3\mathcal{L}y + 16s^2\mathcal{L}y = \mathcal{L}\cos(4x)$$

$$\mathcal{L}y = \frac{1}{s^2(s+1)}\mathcal{L}\cos(4x), \quad \text{ma} \quad \frac{1}{s} = \mathcal{L}H \qquad \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t}H)$$

Quindi
$$(H*H)(x) = \int_0^x H(x-t)H(t)\,dt = x$$

$$(H*H*e^{-t}H) = \int_0^x (x-t)e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}(x-t)\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x e^{-t}\,dt = x + \left[e^{-t}\right]_0^x = x + e^{-x} - 1$$

e
$$(H*H*e^{-t}H*\cos 4x) = \int_0^x (x-t+e^{-(x-t)}-1)_+ \cos 4t\,dt$$

$$= \int_0^x (x-t+e^{-(x-t)}-1)\cos(4t)\,dt = \int_0^x (x-t-1)\cos 4t\,dt + \int_0^x e^{-(x-t)}\cos(4t)\,d$$

$$\int_0^x e^{-(x-t)}\cos 4t\,dt = \left[\frac{\sin(4t)}{4}e^{-(x-t)}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x e^{-(x-t)}\frac{\sin(4t)}{4}dt$$

$$= \frac{\sin(4x)}{4} + \left[\frac{\cos(4t)}{16}e^{-(x-t)}\right]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x \frac{\cos 4t}{16}e^{-(x-t)}dt$$

Quindi

$$\frac{17}{16}\int_0^x e^{-(x-t)}\cos 4t\,dt = \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\cos(4x)}{16} - \frac{e^{-x}}{16}$$

$$\int_0^x e^{-(x-t)}\cos(4t)dt = \frac{16}{17}\left(\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\cos(4x)}{16} - \frac{e^{-x}}{16}\right)$$

$$= \frac{4}{17}\left(\sin(4x) + \frac{\cos(4x)}{4} - \frac{e^{-x}}{4}\right)$$

Analogamente

$$\int_0^x (x-t-1)\cos(4t)dt = \left[\frac{\sin(4t)}{4}(x-t-1)\right]_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{\cos(4t)}{4}dt$$

$$= -\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{16}$$

Pertanto

$$\left(H*H*e^{-x}H*\cos 4x\right) = \frac{4}{17}\left(\sin(4x) + \frac{\cos(4x)}{4} - \frac{e^{-x}}{4}\right) - \frac{3}{16}\sin(4x$$

Quindi $\quad \mathcal{L}y = \mathcal{L}\left(H*H*e^{-x}H*\cos 4x\right)$

da cui

$$y = \frac{4}{17}\left(\sin(4x) + \frac{\cos(4x)}{4} - \frac{e^{-x}}{4}\right) - \frac{3}{16}\sin(4x)$$

#3 $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} e^{-|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Proviamo che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2 \lim_{M \to +\infty} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=M}$$

$$= 2 \lim_{M \to +\infty} \left(-e^{-M} + 1 \right) = 2$$

Calcoliamo

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \frac{x}{|x|} e^{-|x|} = -\int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi} e^{x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} e^{-x} dx$$

$$= \int_{+\infty}^{0} e^{+is\xi} e^{-s} ds + \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi - x} dx$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left[\frac{e^{is\xi - s}}{i\xi - 1} \right]_{s=M}^{s=0} + \lim_{M \to +\infty} \left[\frac{e^{-ix\xi - x}}{-i\xi - 1} \right]_{x=0}^{x=M}$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \left(\frac{1}{i\xi - 1} - \frac{e^{iM\xi - M}}{i\xi - 1} \right)$$

$$+ \lim_{M \to +\infty} \left(-\frac{e^{-iM\xi - M}}{i\xi + 1} + \frac{1}{i\xi + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{i\xi - 1} + \frac{1}{i\xi + 1} = \frac{i\xi + 1 + i\xi - 1}{-\xi^2 - 1} = -\frac{2i\xi}{\xi^2 + 1}$$

perché $\left| \dfrac{e^{-iM\xi - M}}{i\xi + 1} \right| = \dfrac{e^{-M}}{\sqrt{1+\xi^2}} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$

$\left| \dfrac{e^{iM\xi - M}}{i\xi - 1} \right| = \dfrac{e^{-M}}{\sqrt{1+\xi^2}} \xrightarrow[M \to +\infty]{} 0$

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$

infatti $\mathcal{F}f(\xi) = 2i\frac{\xi}{\xi^2+1}$, ma per poter calcolare $\mathcal{F}\mathcal{F}f$ bisogna che $2i\frac{\xi}{\xi^2+1}$, mentre

$$\left|\frac{2i\,\xi}{\xi^2+1}\right| = \frac{2|\xi|}{\xi^2+1} \quad e$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2|\xi|}{\xi^2+1}\, d\xi = 2\int_0^{+\infty} \frac{\xi}{\xi^2+1}\, d\xi = \lim_{M\to+\infty} \Big[\log(\xi^2+1)\Big]_{\xi=0}^{\xi=M}$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \log(M^2+1) = +\infty$$

Quindi non possiamo calcolare nuovamente la trasformata di Fourier

$\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

δ è lineare perché per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\delta(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2) = (\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)(0) = \alpha\varphi_1(0) + \beta\varphi_2(0) = \alpha\delta(\varphi_1) + \beta\delta(\varphi_2)$$

Proviamo che è continuo. Per ogni $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi$ cioè esiste $[a,b]$ con $\operatorname{supp}\varphi_n \subset [a,b]$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\sup_{[a,b]} |D^k\varphi_n - D^k\varphi| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, allora $\delta(\varphi_n) = \varphi_n(0)$ e $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$, cioè $\delta(\varphi_n) \to \delta(\varphi)$, $n\to+\infty$