$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} = u & U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\} \\ u(x,y) = x^2 & \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 0,\ x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Parametrizziamo Γ con $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\varphi(s) = (s, 0)$. Pertanto il sistema delle caratteristiche è

$$\begin{cases} x' = p_2 \\ y' = p_1 \\ z' = p_1 p_2 + p_2 p_1 \\ p_1' = p_1 \\ p_2' = p_2 \\ x(0) = s \\ y(0) = 0 \\ z(0) = s^2 \\ p_1(0) = 2s \\ p_2(0) = \frac{s}{2} \end{cases}$$

$p_{10} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 2x$

quindi $p_{10} = 2s$;

mentre

$p_{10}\, p_{20} = u(\varphi)$

$2s\, p_{20} = s^2$

$p_{20} = \frac{s}{2}$

$p_1 = 2s e^t$, $\quad p_2 = \frac{s}{2} e^t$,

$$\begin{cases} x' = \frac{s}{2} e^t \\ y' = 2s e^t \\ z' = 2s^2 e^{2t} \\ x(0) = s \\ y(0) = 0 \\ z(0) = s^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{s}{2} e^t + \frac{s}{2} \\ y(t) = 2s e^t - 2s \\ z(t) = s^2 e^{2t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{s}{2}(e^t + 1) \\ y = 2s(e^t - 1) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{e^t + 1}{4(e^t - 1)} \\ y = 2s(e^t - 1) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\dfrac{x}{y}(e^t-1) = e^t+1 \\ y = 2s(e^t-1) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^t\left(\dfrac{4x}{y}-1\right) = \dfrac{4x}{y}+1 \\ y = 2s(e^t-1) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^t = \dfrac{y}{4x-y} \cdot \dfrac{4x+y}{y} \\ y = 2s(e^t-1) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^t = \dfrac{4x+y}{4x-y} \\ y = 2s(e^t-1) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^t = \dfrac{4x+y}{4x-y} \\ y = 2s\left(\dfrac{4x+y}{4x-y}-1\right) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} e^t = \dfrac{4x+y}{4x-y} \\ y = 2s\left(\dfrac{\cancel{4x}+y-\cancel{4x}+y}{4x-y}\right) \\ z = s^2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^t = \dfrac{4x+y}{4x-y} \\ s = \dfrac{1}{4}(4x-y) \\ z = \dfrac{1}{16}(4x-y)^2 \cdot \dfrac{(4x+y)^2}{(4x-y)^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \\ \\ z = \dfrac{1}{16}(4x+y)^2 \end{cases}$$

Quindi $u(x,y) = \dfrac{(4x+y)^2}{16}$. Infatti

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{4x+y}{2} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{8}(4x+y)$$

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{(4x+y)^2}{16} = u}$$

#
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^4+6y^2}{x^4+y^4+6} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \frac{x^4+6y^2}{x^4+y^4+6} \qquad f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, perché $x^4+y^4+6>0$

e f è rapporto di due polinomi

Per il Teorema di Peano-Picard risulta che

esiste ed è unica la soluzione per ogni $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.

La soluzione inoltre è C^∞ perché $f \in C^\infty$

Per quanto riguarda la globalità della soluzione, verifichiamo se f ha crescita è al più lineare.

$$|f(x,y)| = \frac{x^4+6y^2}{x^4+y^4+6} \le \frac{6(x^4+y^2)}{x^4+y^4+6} \le \frac{6(x^4+y^4+6)+6y^2}{x^4+y^4+6}$$

$$= 6 + \frac{6y^2}{x^4+y^4+6} \le \begin{cases} 12 & \text{se } y^2 \ge 1 \\ 7 & \text{se } y^2 \le 1 \end{cases}$$

quindi
$$|f(x,y)| \le 12,$$ cioè f è limitata

e pertanto la soluzione è globale.

Se $x_0=0$ e $y_0=1$ $\quad y'(0) = \frac{6}{7}$

$$y''(x) = \frac{(4x^3+12yy')(x^4+y^4+6)-(4x^3+4y^3y')(x^4+6y^2)}{(x^4+y^4+6)^2}$$

$$y''(0) = \frac{\frac{72}{7}\cdot 7 - \frac{24}{7}\cdot 6}{49} = \frac{72\cdot 7 - 24\cdot 6}{7^3} = \frac{24(21-6)}{7^3}$$

$= \frac{360}{7^3}$. Pertanto

$$y = 1 + \frac{6}{7}x + \frac{180}{7^3}x^2 + o(x^2) \quad , \quad x \to 0.$$

\# $$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = \cos(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \chi_{[0,1]} \end{cases}$$

Dalla formula di D'Alembert segue

$$u(x,t) = \frac{\cos(x+4t) + \cos(x-4t)}{2} + \frac{1}{8}\int_{x-4t}^{x+4t} \chi_{[0,1]}\, ds$$