PRIMO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM (4 CREDITI)

09/01/2012
(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.................................Nome..............................Mat......................CdL.............

Esercizio 1 [9 punti]
Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo della separazione delle variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin(4\pi x), & (x,t) \in (0,4)\times(0,+\infty), \\ u(x,0) = g(x), & x \in [0,4], \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(4,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

dove $g : [0,4] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 8-2x, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Esercizio 2 [3 punti] Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + 16y'' = \cos(4x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 [5 punti]
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|}e^{-|x|}$:

(i) provare che $f \in L^1(\mathbb{R})$;
(ii) calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ di f.

Esercizio 4 [3 punti] Provare che la δ (delta di Dirac) è una distribuzione di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 5 [3 punti] Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x^4+6y^2}{x^4+y^4+6}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Determinare l'insieme in cui esiste ed è unica la soluzione e quale regolarità ha. Scrivere la soluzione approssimata del problema in oggetto al secondo ordine in un intorno di $x_0 = 0$ quando $y_0 = 1$.

Esercizio 5 [7 punti] Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = u, & U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x,y) = x^2, & \text{in } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y = 0,\ x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Scrivere in forma cartesiana la soluzione trovata.