SECONDO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM (4 CREDITI)

20/01/2012

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome...................................Nome................................Mat.......................CdL.............

Esercizio 1 [9 punti]

Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo della separazione delle variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + th(x), & (x,t) \in (0,3) \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = \sin(3\pi x), & x \in [0,3], \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(3,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

dove $h : [0,3] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \\ 6 - 2x, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$$

Esercizio 2 [3 punti] Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(iv)} + 9y^{''} = \sin(3x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0, \\ y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 [5 punti]

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$:

(i) calcolare esplicitamente $f * f$ (f convoluto con f),

(ii) calcolare la trasformata di Fourier di $f * f$ (cioè $\mathcal{F}(f * f)$).

Esercizio 4 [3 punti] Determinare la distribuzione associata alla funzione $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e provare che è una distribuzione di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Esercizio 5 [3 punti] Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(\frac{x^6+6y^2}{x^2+y^4+6}), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Determinare l'insieme in cui esiste ed è unica la soluzione e quale regolarità ha. Scrivere la soluzione approssimata del problema in oggetto al secondo ordine in un intorno di $x_0 = 0$ quando $y_0 = 1$.

Esercizio 6 [7 punti] Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (x+y)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial y} = u, & U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y \geq 1, \ x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x,y) = x, & \text{in } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y = 1, \ x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Determinare i punti caratteristici.