PRE-APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM (4 CREDITI)

17/12/2012
(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome..................................Nome...............................Mat.......................CdL.............

Esercizio 1 [4 punti]
Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ -x^2, & x \in [-1, 0[. \end{cases}$$

Calcolare i coefficienti della serie di Fourier di g. Supponendo di prolungare periodicamente la funzione g (si consideri pure per semplicità $g :]-1, 1] \to \mathbb{R}$) come una funzione di periodo 2 su tutto $\mathbb{R}$, si chiede se la serie di Fourier corrispondente converge semplicemente per $x = 1/2$ e qual è la serie numerica che si ottiene.

Esercizio 2 [8 punti]
Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo della separazione delle variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + tx^2, \ (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = x^2, \ x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, \ t \geq 0, \\ u(1, t) = 0, \ t \geq 0. \end{cases}$$

Esercizio 3 [3 punti] Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' = \sin(2x), \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4 [3 punti]
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{|x|} e^{-|3x|}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$:

(i) provare che $f \in L^1(\mathbb{R})$;
(ii) calcolare la trasformata di Fourier $\mathcal{F}f$ di f.

Esercizio 5 [3 punti] Sia $| x |: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si chiede di provare che (i) $| x | \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; (ii) scrivere la distribuzione associata a $| x |$; (iii) calcolare poi qual è la derivata di $| x |$ come distribuzione.

Esercizio 6 [3 punti] Assegnato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 + x^2, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

Scrivere la soluzione approssimata del problema in oggetto al secondo ordine in un intorno di $x_0 = 0$ quando $y_0 = 1$.

Esercizio 7 [6 punti] Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (-2x + 3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (3x - 2y)\frac{\partial u}{\partial y} = x + 1, \ U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y \geq 0, \ x \in \mathbb{R}\}, \\ u(x, y) = x^3, \ \text{in } \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ y = 0, \ x \in \mathbb{R}\}. \end{cases}$$

Individuare, se esistono punti caratteristici del problema di Cauchy.