

Compito per casa del 3/10/2014

(4) Sia φ soluzione di
$$\begin{cases} y' = \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(a) Provere che φ è definita su tutto \mathbb{R} .

(b) Scrivere un'approximazione della soluzione in modo tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi - \varphi}{x^3} = 0$.

Motivare esaurientemente le risposte.

(ii) Provere che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ se $n \neq m$ $\sin(nx)$ è ortogonale a $\sin(mx)$ in $L^2(-\pi, \pi)$

Provere che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ se $n \neq m$

$\cos(nx)$ è ortogonale a $\cos(mx)$ in $L^2(-\pi, \pi)$

Provere che per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ $\sin(nx)$ è ortogonale a $\cos(mx)$.

Provere che $\|\sin(nx)\|_{L^2(-\pi, \pi)} = \sqrt{\pi} = \|\cos(mx)\|_{L^2(-\pi, \pi)}$

Si ricorda che $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ sono ortogonali

se $\langle f, g \rangle_{L^2(-\pi, \pi)} = 0$