

**PRE-APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA LM (4 CREDITI)**

18/12/2014

(Comm. Prof. F. Ferrari)

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

**Esercizio 1** [ 5 punti]

Sia  $g : ] - \pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi], \\ 1, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0[, \\ x, & x \in ] - \pi, -\frac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

Calcolare la serie di Fourier di  $g$ .

**Esercizio 2** [ 11 punti]

Risolvere il seguente problema utilizzando il metodo della separazione delle variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 36 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5t^2 \sin(4x), & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = h(x), & x \in [0, \pi], \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

dove

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi], \\ 1, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

**Esercizio 3** [7 punti] Utilizzando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 9y = 3, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

**Esercizio 4** [7 punti] Sia  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\rho(x) = \begin{cases} ce^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

con  $c$  opportuna tale che  $\int_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = 1$ . Dopo aver scritto la definizione di successione di distribuzioni convergente in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , provare che  $\{k\rho(kx)\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a  $\delta$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  per  $k$  che tende a  $+\infty$ .