Correzione

(1)

Per ogni $x>0$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

Se $x=0$, allora $f_n(0)=0$ per ogni $n>0$ e per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.

Se $x<0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -\infty$

Se restringiamo il nostro studio a $[1,+\infty[$ allora per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puntualmente per ogni $x\in[1,+\infty[$ e per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

Studiamo la convergenza uniforme. In particolare

$$\sup_{[1,+\infty[} |f_n| = \max_{[1,+\infty[} 5n^\alpha x\cdot e^{-nx}$$, infatti

per ogni α $\lim_{x\to+\infty} 5n^\alpha x\cdot e^{-nx} = 0$, quindi dalla continuità di f_n si deduce che per ogni n esiste il massimo. In particolare, poiché $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha:

$$f_n'(x) = 5n^\alpha e^{-nx} - 5n^{\alpha+1} x e^{-nx} = 5n^\alpha e^{-nx}(1-xn) > 0$$

$\iff 1-nx>0 \iff x<\frac{1}{n}$. Quindi

f_n è monotona crescente in $]-\infty,\frac{1}{n}]$ e decrescente in $[\frac{1}{n},+\infty[$ e in $\frac{1}{n}$ si realizza il massimo.

Quindi $\max_{[1,+\infty[} 5n^\alpha x\cdot e^{-nx} = 5n^\alpha e^{-n} = f_n(1)$ perché $\frac{1}{n}<1$,

e f_n è monotona decrescente (strettamente in $[1,+\infty[$)

da cui $$\lim_{n\to+\infty} \max_{[1,+\infty[} 5n^\alpha x e^{-nx} = \lim_{n\to+\infty} 5n^\alpha e^{-n} = 0$$

per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

Pertanto $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{unif} 0$ in $[1,+\infty[$, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$. Mentre se consideriamo $[0,1]$ abbiamo (per le stesse ragioni esposte)

$$\max_{[0,1]} 5n^\alpha x\cdot e^{-nx} = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 5n^\alpha\cdot\frac{1}{n}e^{-1} = 5n^{\alpha-1}e^{-1}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\max_{[0,1]} 5n^\alpha x\cdot e^{-nx} = \lim_{n\to+\infty} 5n^{\alpha-1}e^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<1 \\ 5e^{-1} & \text{se } \alpha=1 \\ +\infty, & \alpha>1 \end{cases}$$

In questo caso $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{unif} 0$ in $[0,1]$ se $\alpha<1$.

Mentre non converge uniformemente in $[0,1]$ se $\alpha\geq 1$.

(2) $f(x,y)=\sin y^2$, quindi esiste una ed una sola sol. del problema di Cauchy (infatti $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$).

In particolare la funzione identicamente nulla è la soluzione cercata. Si osservi che calcolando direttamente i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor si ha $y'(0)=0$, $y''(0)=2yy'\cos y^2=0$ ecc.

Ovvero tutte le derivate sono nulle in 0.

(3) Nel caso $\begin{cases} y'=\sin y^2 \\ y(0)=1\end{cases}$, abbiamo ancora una ed una sola soluzione. Per rispondere alle domande poste, trattandosi di una soluzione di classe C^∞, abbiamo

$y'(0)=\underbrace{\sin y^2(0)}_{=\sin 1}$; $y''(x)=2yy'\cos y^2 \longrightarrow y''(0)=2y(0)y'(0)\cos 1$
$= 2\sin(1)\cos(1)$

$$y''' = 2y'^2 \cos y^2 + 2yy'' \cos y^2 + 2yy' \cdot 2yy' \sin(y^2)$$

$$= 2y'^2 \cos y^2 + 2yy'' \cos y^2 - 4y^2 y'^2 \sin y^2$$

Quindi $y'''(0) = 2\sin^2(1)\cos(1) + 2 \cdot 2 \sin(1)\cos(1)\cos(1) - 4 \cdot 4 \sin^4(1)\cos^2(1)$

$$= 2\sin^2(1)\cos(1) + 4\sin(1)\cos^2(1) - 16\sin^4(1)\cos^2(1).$$

La soluzione $y(x) = 1 + \sin(1) \cdot x + \dfrac{2\sin(1)\cos(1)}{2} x^2$

$$+ \left(2\sin^2(1)\cos(1) + 4\sin(1)\cos^2(1) - 16\sin^4(1)\cos^2(1)\right)\frac{x^3}{3!}$$

$$+ o(x^3)$$

Pertanto $\varphi(x) = 1 + \sin(1) \cdot x + \dfrac{\sin(1)\cos(1)}{2} x^2 + \dfrac{(\sin^2(1)\cos(1) + 2\sin(1)\cos^2(1) - 8\sin^4(1)\cos^2(1))}{3}$

---

(4) Se consideriamo l'applicazione (funzione

$T(x) = 2\sin x$ con $T:]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ possiamo

considerare un dominio in cui sarà una contrazione

se $|T(x) - T(y)| \le c\,|x-y|$ con $c \in [0,1[$.

In effetti $|2\sin x - 2\sin y| = 2|\sin x - \sin y|$

$= 2|\cos\xi \cdot (x-y)|$ con $\xi \in]x,y[$ se $x<y$.

$\uparrow$

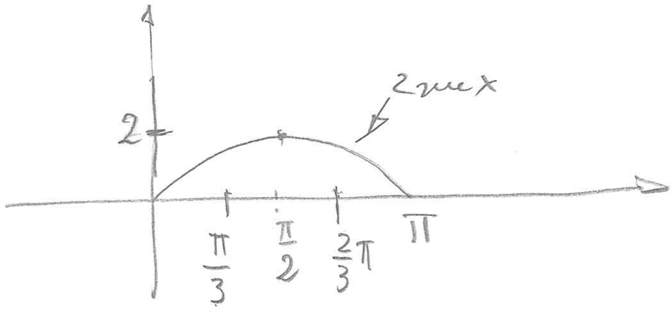
Lagrange.

Nel caso in cui $x, y \in I \subset]0,\pi[$ t.c.

$2|\cos\xi| < 1$ cioè $|\cos\xi| < \frac{1}{2}$, cioè nel nostro

intervallo se $\xi \in]\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi[$, allora $c < 1$

Si tratta di selezionare il dominio in modo tale che T diventi una contrazione.



In effetti $|2\sin x| < 2$ e

$$f\left(\left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{2}{3}\pi-\varepsilon\right]\right) \subseteq \left[2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varepsilon\right), 2\right] \subset \left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{2}{3}\pi-\varepsilon\right]$$

con $\varepsilon > 0$ fissato eventualmente piccolo.

Quindi $T: \left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{2}{3}\pi-\varepsilon\right] \longrightarrow \left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{2}{3}\pi-\varepsilon\right]$

$T(x) = 2\sin(x)$ è una contrazione

Sia $x_0 = \frac{\pi}{2}$ $\quad x_{n+1} = T(x_n)$ allora

$x_1 = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2$

$x_2 = 2\sin 2$

$x_3 = 2\sin(2\sin 2)$

$\vdots$

Dal Teorema di Banach-Caccioppoli segue l'esistenza di uno ed un solo punto fisso $\bar{x} \in \left[\frac{\pi}{3}+\varepsilon, \frac{2}{3}\pi-\varepsilon\right]$

t.c. $T(\bar{x}) = \bar{x}$ cioè $\bar{x} = 2\sin\bar{x}$

con $\bar{x} = \lim_{n\to+\infty} x_n$.