Es. 1

La funzione g è dispari (a meno di un insieme di misura nulla) su $[-\pi, \pi]$

Quindi, sapendo che $g \in L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$, $a_k = 0$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, mentre

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(kx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} x\sin(kx)\,dx\right)$$

per $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sviluppando i calcoli otteniamo:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \left[-\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos(kx)\,dx}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k} - \frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{\pi}{2k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{1}{k} - \frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{\pi}{2k}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{1}{k^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right).$$

Es. 2

$u = XT$ con X dipendente solo da x e T dipendente solo da t.

$$T'X = 36X''T \quad ; \quad \frac{T'}{T} = \frac{36X''}{X} \quad ; \quad \begin{cases} 36X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

$36\gamma^2 = \lambda$ eq. caratt. $\quad \gamma^2 = \frac{\lambda}{36} \longrightarrow \gamma_{1,2} \to \begin{cases} \pm\sqrt{\frac{\lambda}{36}}, & \text{se } \lambda > 0 \\ 0 & \text{se } \lambda = 0 \\ \pm i\sqrt{\frac{|\lambda|}{36}} & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$

Se $\lambda > 0$ $\quad \gamma_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{\lambda}}{6}$; $V_2 = \text{span}\left\{e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{36}}x}; e^{+\sqrt{\frac{\lambda}{36}}x}\right\} \to \begin{matrix} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{6}\pi} + c_2 e^{+\frac{\sqrt{\lambda}}{6}\pi} = 0 \end{matrix}$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{6}\pi} & e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{6}\pi} \end{bmatrix} = e^{\frac{\sqrt{\lambda}}{6}\pi} - e^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{6}\pi} \neq 0$. Quindi non esistono sol. non banali.

se $\lambda=0$ $\quad V_2=\text{span}\{1,x\}$ $\longrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_1+\pi c_2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} c_1=0 \\ c_2=0 \end{matrix}$ $\longrightarrow$ non esistono soluzioni non banali.

se $\lambda<0$ $\quad V_2=\text{span}\left\{\cos\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{36}}x\right), \sin\left(\sqrt{\frac{|\lambda|}{36}}x\right)\right\} \longrightarrow \begin{cases} c_1=0 \\ c_1\cos\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{6}\pi\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{6}\pi\right)=0 \end{cases}$

$\longrightarrow \sin\left(\frac{\sqrt{|\lambda|}}{6}\pi\right)=0$ (per ottenere sol. non banali). Quindi $\frac{\sqrt{|\lambda|}}{6}\pi=k\pi$ per $\lambda<0$, cioè $\frac{|\lambda|}{36}=k^2$, ovvero $\lambda=-36k^2$. Le autosoluzioni sono: $X_k=\sin(kx)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Cerchiamo ora soluzioni nella forma $u=\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\cdot T_k$.

Supponendo che sia possibile "scambiare le derivate parziali con la serie" e considerando $\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\sin(kx)=5t^2\sin(4x)$ in $L^2(-\pi,\pi)$ come serie di Fourier, abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin(kx)\left(T_k'+36k^2T_k-b_k(t)\right)=0, \quad \text{dove} \quad b_k(t)=\begin{cases}0, & \text{se } k\neq 4 \\ 5t^2, & \text{se } k=4\end{cases}$$

Richiediamo allora che per ogni $k\in\mathbb{N}$, $k\neq 4$

$$\begin{cases} T_k'+36k^2T_k=0 \\ T_k(0)=d_k \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} T_4'+36\cdot 16\,T_4=5t^2 \\ T_4(0)=d_4 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$T_k=d_ke^{-36k^2t}$

$LV_1=\text{span}\{e^{-576t}\}+\varphi_4$ dove φ_4 è sol di $T_4'+576T_4=5t^2$.

Cercando $\varphi_4=At^2+Bt+C$, abbiamo

$2At+B+576(At^2+Bt+C)=5t^2$, da cui

$$\begin{cases} 576A-5=0 \\ 576B+2A=0 \\ B+576C=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{5}{576} \\ B=-\frac{10}{(576)^2} \\ C=\frac{10}{(576)^3} \end{cases}$$

Pertanto

$$T_4=\left(d_4-\frac{10}{(576)^3}\right)e^{-576t}+\frac{5}{576}t^2-\frac{10}{(576)^2}t+\frac{10}{(576)^3}$$

Allora

$$u = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq 4}}^{\infty} d_k e^{-36k^2 t} \sin(kx) + \sin(4x)\left(\left(d_4 - \frac{10}{(576)^3}\right)e^{-576t} + \frac{5}{576}t^2 - \frac{10}{(576)^2}t + \frac{10}{(576)^3}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-36k^2 t} \sin(kx) + \sin(4x)\left(-\frac{10}{(576)^3}e^{-576t} - \frac{\;}{(576)^2}t + \frac{10}{(576)^3}\right)$$

Richiediamo infine che $\sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx) = h(x)$, avendo prolungato h come funzione dispari su $[-\pi,\pi]$. Riconosciamo che $g = h$ a meno di un insieme di misura nulla, quindi i coefficienti di d_k sono quelli calcolati per g nell'esercizio 1.

La funzione così costruita è potenzialmente soluzione classica del problema di Cauchy-Dirichlet assegnato

Esercizio 3.

$$\begin{cases} y'' - 9y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \longrightarrow s^2 \mathcal{L}y - 9\mathcal{L}y = 3\mathcal{L}H \longrightarrow \mathcal{L}y = \frac{3\mathcal{L}H}{s^2-9}$$

$$\frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+3} = \frac{1}{s^2-9} \Longleftrightarrow As + 3A + Bs - 3B = 1 \longrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-3B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ -6B=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\frac{1}{6}\left(\mathcal{L}e^{3t} + \mathcal{L}e^{-3t}\right) = \frac{1}{6}2\mathcal{L}\sinh(3t) = \frac{1}{3}\mathcal{L}\sinh(3t).$$

Quindi $\mathcal{L}y = \mathcal{L}\sinh(3t) \cdot \mathcal{L}H \longrightarrow y = (\sinh_+(3t) * H)(x)$

$$= \begin{cases} \int_0^x \sinh(3\chi)\, d\chi & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

. Quindi $y = \frac{1}{3}\cosh(3t) - \frac{1}{3}$

Es. 4 $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ se per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\lim_{k\to+\infty} \langle T_k | \varphi \rangle = \langle T | \varphi \rangle$$

In questo caso: $\langle k\rho(kx) | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} k\rho(kx)\varphi(x)\,dx$ $\quad kx = \xi$ cambiamento di variabile

$$= \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{k}\right) d\xi$$

Allora se $\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \rho(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{k}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} \rho(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{k}\right) d\xi$

otteniamo che

$$\lim_{k\to+\infty} \langle k\rho(kx) | \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} \rho(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{k}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0)\rho(\xi)\,d\xi$$

$= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}} \rho(\xi) = \varphi(0) = \delta(\varphi)$, perché per ipotesi $\int_{\mathbb{R}} \rho(\xi)\,d\xi = 1$.

Il passaggio al limite sotto il segno d'integrale è possibile grazie al Teorema sulla convergenza dominata di Lebesgue, in quanto $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.