Vedi: Lezioni su equazioni ellittiche del secondo ordine di Sandro Salsa; Caffarelli Cabré Fully nonlinear Elliptic Eq.s

Lemma (crescita)

Sia $u \in \underline{S}(-|f|)$ in $Q_{4\sqrt{n}}$, $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \le \varepsilon$ e u soddisfi

$$|\{u > M^k\} \cap Q_1| \le (1-\mu)^k \quad \text{(condizione di decadimento)}$$

del Lemma H-C. Allora esistono due numeri $c_0, k_0 > 0$ tali che se $k \ge k_0$ e

(a) $u(x_0) \geq M^k$

(b) $d(x_0, Q_1^c) \geq 2 c_0 (1-\mu)^{\frac{k}{n}} = 2\rho_k$,

allora

$$\sup_{B_{\rho_k}(x_0)} u \geq \left(1 + \frac{1}{M}\right) u(x_0) \equiv M_0 u(x_0).$$

Dim.

Procedendo per assurdo supponiamo che $\sup_{B_{\rho_k}(x_0)} u < M_0 u(x_0)$; (1)

Sia $A_1 = \{u > M^{k-1}\} \cap Q_1$. Sappiamo allora che

$$|A_1| = |\{u > M^{k-1}\} \cap Q_1| \le (1-\mu)^{k-1}. \quad ; (2)$$

Sia poi $l_k = \frac{\rho_k}{8M}$ (2') in modo che $Q_{l_k}(x_0) \subset Q_{4 l_k \sqrt{n}} \subset B_{\rho_k}(x_0)$

Effettuiamo il solito cambiamento di variabili $x = x_0 + l_k y$ per cui

$y \in Q_1$ (rispett. Q_3, $Q_{4\sqrt{n}}$) $\iff$ $x \in Q_{l_k}(x_0)$ (rispett. $Q_{3 l_k}(x_0)$, $Q_{4 l_k \sqrt{n}}(x_0)$).

Definiamo

$$W(y) = \frac{M_0 u(x_0) - u(x)}{u(x_0)(M_0 - 1)} \left(= \frac{M_0 u(x_0) - u(x_0 + l_k y)}{u(x_0)(M_0 - 1)} \right)$$

Ⓐ $\boxed{\text{Supponiamo che } w \text{ soddisfi le ipotesi del Lemma H-B.}}$ ②

Allora $|\{w>M\}\cap Q_1| \le 1-\mu$, per cui ponendo

$$A_2 = \left\{x:\ \frac{M_0\, u(x_0)-u(x)}{u(x_0)(M_0-1)} > M\right\} \cap Q_{e_k}(x_0),\quad \text{risulta}$$

$$|A_2| \le (1-\mu)\,\ell_k^n = (1-\ell)|Q_{e_k}|; \quad (3)$$

Procediamo determinando M_0 in modo tale che

$$Q_{e_k} \subset A_1 \cup A_2.$$

Infatti se $x\in Q_{e_k}$ e $u(x) > \frac{u(x_0)}{M}$, allora da (1) segue che $u(x) > M^{k-1}$ e quindi $x \in A_1$.

Se invece $u(x) \le \frac{u(x_0)}{M}$, allora

$$\frac{M_0\, u(x_0)-u(x)}{u(x_0)\,(M_0-1)} \ge \frac{M_0\, u(x_0)-\frac{u(x_0)}{M}}{u(x_0)\,(M_0-1)} = M,$$

perché $\dfrac{M_0-\frac{1}{M}}{M_0-1} = \dfrac{1}{M_0-1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{M}-1} = M$, se $M_0 = 1+\frac{1}{M}$.

Quindi $x\in A_2$. Allora $Q_{e_k} \subset A_1 \cup A_2$ e

$$|Q_{e_k}| \le \underbrace{|A| + |A_2| \le (1-\mu)^{k-1}}_{(2)} + \overbrace{(1-\mu)|Q_{e_k}|}^{(3)}.$$

Sviluppando i calcoli

$$|Q_{e_k}| \le (1-\mu)|Q_{e_k}| + (1-\mu)^{k-1} \iff$$

$$\mu|Q_{e_k}| \le (1-\mu)^{k-1}, \quad \text{cioè} \quad |Q_{e_k}| \le \frac{(1-\mu)^{k-1}}{\mu}.$$

Ovvero $\ell_k^n = |Q_{e_k}| \le \dfrac{(1-\mu)^{k-1}}{\mu} \iff$ da (2') $\dfrac{\rho_n^n}{(8M)^n} \le \dfrac{(1-\mu)^{k-1}}{\mu} = \dfrac{(1-\mu)^k}{\mu(1-\mu)}$

(4)

Utilizzando, ora (b), da $2c_0(1-\mu)^{\frac{k}{n}} = 2\rho_k$ e (a) segue

$$\frac{(2c_0)^n \cancel{(1-\mu)^k}}{(8n)^n} \le \frac{\cancel{(1-\mu)^k}}{\mu(1-\mu)} \iff 2c_0 \le \frac{8n}{(\mu(1-\mu))^{1/n}}$$

Se si sceglie $c_0 > 8n(\mu(1-\mu))^{1/n}$ e k_0 in modo tale che $\rho_k \le \frac{1}{4}$ si giunge a una contraddizione.

Dobbiamo allora provare l'affermazione (A)

Infatti, se $w \in \overline{S}(g)$ in $Q_{4\sqrt{n}}$, dove $g(y) = |f(x_0+\ell_k y)| \frac{\ell_k^2}{u(x_0)(M_0-1)}$

e
$$P^-(w) = \frac{1}{u(x_0)(M_0-1)} P^-(M_0 u(x_0) - u(x)) = \frac{P^-(-u(x_0+\ell_k y))}{u(x_0)(M_0-1)}$$
$$= -\frac{P^+(u)\,\ell_k^2}{u(x_0)(M_0-1)} \le \frac{|f|\,\ell_k^2}{u(x_0)(M_0-1)} = \frac{|f(x_0+\ell_k y)|\,\ell_k^2}{u(x_0)(M_0-1)},$$

ricordiamo infatti che $u \in \underline{S}(-|f|)$, cioè $P^+(u) \ge -|f|$

cioè $-P^+(u) \le |f|$).

Inoltre $w > 0$ in $Q_{4\sqrt{n}}$, perché $\sup_{B_{\rho_k}(x_0)} u \le M_0 u(x_0)$ da ip. assurdo (1), da cui segue $w \ge \frac{M_0 u(x_0) - M_0 u(x_0)}{u(x_0)(M_0-1)} = 0$

e $\inf_{Q_3} w \le w(0) = 1$. Infine

$$\|g\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} = \frac{\ell_k^2}{u(x_0)(M_0-1)} \|f(x_0+\ell_k y)\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} = \frac{\ell_k^2}{u(x_0)(M_0-1)} \ell_k^{-n} \|f\|_{L^n(Q_{4\ell_k\sqrt{n}})}$$
$$= \frac{\ell_k^{2-n}\|f\|_{L^n(Q_{4\ell_k\sqrt{n}})}}{u(x_0)(M_0-1)} \le \frac{\varepsilon\,\ell_k^{2-n}}{u(x_0)(M_0-1)} \overset{\text{ip }(a)}{=} \frac{\varepsilon\,\ell_k^{2-n}}{u(x_0)(M_0-1)}$$
$$\le \frac{\varepsilon\,\ell_k^{2-n}}{M^k(M_0-1)} = \frac{\varepsilon\,\ell_k^{2-n}}{M^{k-1}} < \varepsilon$$

scegliendo $M > (1-\mu)^{-1}$!

Lemma (Fin)

Supponiamo che $u \in \underline{S}(-|f|)$ in $Q_{4\sqrt{n}}$, $\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} < \varepsilon$

e supponiamo che per ogni $k \geq 1$

$$|\{u > M^k\} \cap Q_1| \leq (1-\mu)^k$$

[per cui vale che $\exists\, d, \eta$, costanti universali, t.c.

$$|\{u > t\} \cap Q_1| \leq d\, t^{-\eta} \quad , \quad \text{per ogni } t > 0 \,]$$

Allora $\exists\, C = C(n, \lambda, \Lambda)$ t.c.

$$\sup_{Q_{1/2}} u \leq C$$

<u>N.B</u>

Le ipotesi del Lemma (Fin) sono le stesse di Lemma (crescita), per cui è anche vero che se (a) e (b) sono soddisfatte allora $\sup_{B_{\rho_k}(x_0)} u \geq \left(1 + \frac{1}{M}\right) u(x_0) = M_0\, u(x_0)$.

<u>Dim.</u>

Scegliamo M_0, $\rho_k = c_0 (1-\mu)^{k/n}$ e $k \geq k_0$ come nel Lemma crescita e sia N il minimo intero t.c. $M_0^N \geq M$.

Proviamo che $u \leq M^{k_0}$ per ogni $x \in Q_{1/2}$.

Eventualmente modificando k_0 si può supporre che

$$N \sum_{k=k_0}^{\infty} \rho_k = N c_0 \sum_{k=k_0}^{\infty} (1-\mu)^{\frac{k}{n}} \leq \frac{1}{8} .$$

Procediamo per assurdo. Sia $x_0 \in Q_{1/2}$ t.c.

$$u(x_0) > M^{K_0}$$

Poiché $\rho_{K_0} < \frac{1}{8}$ si ha $d(x_0, Q_1^c) \geq \frac{1}{2} \geq 2\rho_K$.

Dal Lemma di crescita si deduce che $\exists\, x_1 \in B_{\rho_{K_0}}(x_0)$ t.c.
$u(x_1) \geq M_0 M^{K_0} \geq M_0 \sup_{B_{\rho_K}(x_0)} u$. (si ricordi che vale il principio del massimo debole). Quindi $d(x_1, Q_1^c) \geq \frac{1}{2} - \rho_{K_0} \geq 2\rho_{K_0}$
e dunque si può riapplicare il Lemma di crescita provando l'esistenza di un punto $x_2 \in B_{\rho_K}(x_1)$ t.c.

$$u(x_1) \geq M_0^2 M^{K_0} \geq M_0^2 \sup_{B_{\rho_K}(x_0)} u$$

e che $d(x_2, Q_1^c) \geq \frac{1}{2} - 2\rho_{K_0} \geq 2\rho_{K_0}$.

Procedendo in tal modo e iterando, dopo N passi si ottiene $x_N \in B_{\rho_{K_0}}(x_{N-1})$ t.c.

$$u(x_N) \geq M_0^N M^{K_0} \geq M^{K_0+1},$$

$$d(x_N, Q_1^c) \geq \frac{1}{2} - N\rho_{K_0} \geq 2\rho_{K_0+1}$$

Ripetendo il ragionamento, ma partendo da x_N anziché da x_0, si ottiene la successione di punti $\{y_s\} \subset Q_1$
$y_0 = x_0,\ y_1 = x_N, \dots, y_s = x_{sN}$ e tali che $u(y_s) \geq M^{K_0+s}$
e $d(y_s, Q_1^c) \geq \frac{1}{2} - N\sum_{z=0}^{\infty} \rho_{K_0+z} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \geq 2\rho_{K_0+s}$.

Poiché $u(y_s) \longrightarrow \infty$ e $u \in C(Q_1)$ si ha una contraddizione. $\boxtimes$

Dimostrazione della stima L^∞ locale

Supponiamo prima che $u \in \underline{S}(-|f|)$ in $Q_{4\sqrt{n}}$,
$\|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})} \leq \varepsilon$ e che $\|u^+\|_{L^\eta(Q_{4\sqrt{n}})} \leq d^{1/\eta}$

dove ε, η, d sono gli stessi già introdotti nei precedenti lemmi. Allora per ogni $t>0$

$$|\{u>t\}\cap Q_1| \leq t^{-\eta}\int_{Q_1}(u^+)^\eta \leq d\, t^{-\eta}.$$

Dim.

$$|\{u>t\}\cap Q_1| = \int_{Q_1}\chi_{\{u>t\}\cap Q_1} \leq \int_{Q_1}\left(\frac{u}{t}\right)^\eta \chi_{\{u>t\}\cap Q_1} = \frac{1}{t^\eta}\int_{Q_1} u^\eta \chi_{\{u>t\}\cap Q_1}$$

$$\leq \frac{1}{t^\eta}\int_{Q_1} u^{+\eta} \leq d\, t^{-\eta}$$

sapendo che $\|u^+\|_{L^\eta(Q_{4\sqrt{n}})} \leq d^{1/\eta}$.

A questo punto si applica Lemma (Finale) e si ottiene che

$$\boxed{\sup_{Q_{1/2}} u \leq C}$$

N.B. $\|u^+\|_{L^\eta(Q_{4\sqrt{n}})} \leq d^{1/\eta}$ perché possiamo sempre supporre che

$$w = \frac{u}{d^{-1/\eta}\|u^+\|_{L^\eta(Q_{4\sqrt{n}})} + \|f\|_{L^n(Q_{4\sqrt{n}})}\varepsilon^{-1}}$$

per cui $\|w^+\|_{L^\eta(Q_{4\sqrt{n}})} \leq d^{1/\eta}$.