PROGRAMMA DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Elenco ufficioso degli argomenti svolti durante il corso

Corso di Laurea Specialisitica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea in Ingegneria Specialisitica per l'Ambiente e il Territorio. Anno Accademico 2006/2007, Prof. F. Ferrari

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

Definizione di equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale. Definizione di problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie di ordine uno e di ordine n. Teorema di Eulero, Teorema di Peano-Picard. Condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni locali di un problema di Cauchy. Definizione di soluzione massimale di una equazione differenziale ordinaria. Condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni massimali. Regolarità delle soluzioni delle equazioni differenziali in realzione alla regolarità di f. Equazioni a variabili separabili, equazioni differenziali esatte. Equazioni di tipo Bernoulli. L'equazione logistica. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali di ordine uno.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti continui su un intervallo. Definizione di integrale generale di una equazione differenziale lineare omogenea. Prorpietà dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea. Sistema fondamentale di soluzioni. Definizione di integrale generale di una equazione differenziale lineare non omogenea. Proprietà dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare non omogenea. Soluzione particolare. Metodo della variazione delle costanti di Lagrange. Metodo per simpatia.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Il Teorema di Peano Picard. Condizioni sufficienti per l'esistenza di soluzioni globali. Riconducibilità delle equazioni di ordine n alla risoluzione di sistemi di equazioni differenziali di ordine uno con n equazioni. Sistemi di equazioni lineari a coefficienti continui. Esistenza globale delle soluzioni. Integrale generale e sistema fondamentale di soluzioni per equazioni omogenee. Integrale generale di sistemi lineari omogenei di ordine uno: proprietà delle soluzioni. Integrale generale di sistemi lineari di ordine uno a coefficienti continui non omogenei. Sistemi d'equazioni lineari di ordine uno a coefficienti costanti. Autovalori di una matrice. autofunzioni ed autospazi. Autospazi generalizzati. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è somma diretta di degli autospazi generalizzati associati alla mtrice costante $n \times n$. La matrice esponenziale di una matrice costante. Il problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziale lineare di ordine uno, n equazioni. La matrice fondamentale di un sistema di equazioni differenziali di ordine uno omogeneo a coefficienti costanti. Il metodo della variazione delle costanti nei sistemi di equazioni differenziali.

PROBLEMI AI LIMITI

Problemi ai limiti per equazioni differenziali lineari di ordine due a coefficienti costanti. Il problema agli autovalori. Lo spazio delle autofunzioni.

SISTEMI DI EQUAZIONI AUTONOMI

Proprietà delle soluzioni di equazioni eautonome. Definizione di integrale primo. Punti critici o stazionari per un sistema autonomo. Definizione di soluzione stabile secondo Lyapunov per un sistema autonomo. Teorema di stabilità delle soluzioni di un sistema lineare a coefficienti costanti. Linearizzazione e stabilità per le soluzioni di un sistema autonomo. Il modello di Lotka-Volterra. Il modello dell'equazione logistica.

ELEMENTI DI ANALISI REALE

Successioni e serie numeriche. Definizione di serie numerica e di serie convergentre. Serie numeriche a termini positivi. Proprietà delle serie a termini positivi: assenza di irregolarità delle serie a termini positivi. Condizioni necessarie per la convergenza. La serie geometrica e la serie armonica generalizzata. Criteri di convergenza semplice: rapporto radice $n-$esima, confronto e confronto asintotico. Criterio di convergenza di Leibnitz. Convergenza assoluta delle serie di funzioni. convergenza assoluta implica convergenza semplice.

Successioni di funzioni, definizione di convergenza puntuale, definizione di convergenza uniforme. Caratterizzazione della convergenza uniforme. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Teoremi di scambio dl limite della successione con il limite puntuale. Successioni uniformemente convergenti di fuzioni continue sono continue. Scambio del limite di successioni convergenti con l'integrale. Teorema di scambio della derivata con il limite di successioni. Serie di funzioni, convergenza uniforme di serie convergenza del sup e covergenza totale: criterio di Weierstrass per la convergenza totale di funzioni continue. Lo spazio $C([a, b])$ dotato della norma del sup. L'opratore di divergenza. Definizione di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Definizione di superficie orientata. Definizione di integrale di superficie. Il teorema di Gauss-Green sulla divergenza.

SERIE DI FOURIER

Definizione di serie di Fourier. Relazione tra coefficienti della serie di Fourier e la funzione. Funzioni pari e dispari. Convergenza puntuale delle serie di Fourier. Condizione (D) per la convergenza puntuale. Teorema di Riemann-Lebesgue sul comportamento asintotico dei coefficienti della serie di Fourier. Condizioni sufficienti per la convergenza uniforme della serie di Fourier. Disuguaglianza di Bessel. Polinomi trigonometrici e serie di Fourier. Proprietà minimizzanti della serie di Fourier nella convergenza integrale in media quadratica.

SPAZI L^p

L'integrale di Lebesgue. Definizione di $\sigma-$algebra e di misura su una $\sigma-$algebra. Definizione di funzioni misurabili secondo Lebesgue. Definizione di integrale di Lebesgue. Confronto con l'integrale di Riemann. Definizione di funzione semplice. Proprietà dell'integrale di Lebesgue. La funzione di Dirichlet. Nozione di proprietà verificata quasi ovunque. Cenni agli insiemi di misura nulla. Il Teorema di Beppo-Levi. Il Teorema sulla convergenza dominata. Il Teorema di Fubini. Il Teorema di Tonelli. Definizione di cambiamento di variabili. Il Teorema di integrazione mediante cambiamento di variabili per l'integrale di Lebesgue. Lo spazio delle funzioni $\mathcal{L}^p(\Omega)$. La disuguaglianza di Hölder. Relazioni tra spazi $\mathcal{L}^p(\Omega)$ in domini limitati. Lo spazio $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$. Definizione di estremo superiore essenziale e confronto con la nozione di estremo superiore. Gli spazi L^p, $p \geq 1$: definizione e proprietà. Gli spazi L^p, $p \geq 1$: sono spazi di Banach. Se $p = 2$ allora L^2 è uno spazio di Hilbert. Definizione di convoluzione tra funzioni di $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Esempi di sistemi ortonormali in $L^2(-\pi, \pi)$.

LA TRASFORMATA DI FOURIER

Definizione di trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^n)$. La trasfortata di Fourier è un operatore lineare continuo tra $L^1(\mathbb{R}^n)$ e $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. L'integrale della trasformata di Fourier di una funzione f in $L^1(\mathbb{R}^n)$ per una funzione in $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ è l'integrale di f per la trasformata di Fourier di g. La trasformata di fourier della convoluzione di funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$ è il prodotto delle trasformate. Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ delle funzioni a decrescita rapida. La trasformata di Fourier di $D^\alpha f$ con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La $D^\alpha(\mathcal{F}f)$ con $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Formula di inversione della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. L'uguaglianza di Parseval. Il teorema di Plancharel. Cenni all'estensione della trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Applicazioni della trasformata di Fourier nella risoluzioni di semplici equazioni alle derivate parziali.

SPAZI DI SOBOLEV

Definizione di derivata debole. Gli spazi di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ definizione e introduzione della norma che li rende completi. Lo spazio delle funzioni a supporto compatto $C_0^\infty(\Omega)$. Definizione di $H_0^{k,p}(\Omega)$ (cenni).

ANALISI FUNZIONALE

Definizione di spazio metrico e di distanza. Definizione di norma e di successione di Cauchy. Definizione di spazio di Banach. Definizione di prodotto interno e di spazio di Hilbert. Sistemi ortonormali. Defnizione di operatore lineare tra spazi vettoriali. Definizione di operatore lineare continuo tra spazi di Banach. Definizione di operatore tra spazi di Banach limitato. Definizione di forma bilineare su uno spazio di Hilbert. Definizione di funzionale lineare continuo. Formulazione di un problema debole astratto Il Teorema di Lax-Milgram. Il metodo di Galerkin astratto. Il Lemma di Cèa. Esempi di problemi variazionali e relazione con i sistemi ortonormali.

EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Equazione del calore e problema di Cauchy-Dirichlet in una variabile spaziale su un rettangolo. Metodo della separazione delle variabili. Costruzione dei problemi agli autovalori ai limiti, associati all'equazione del calore dipendenti dai dati al bordo. Soluzione formale costruita per mezzo delle serie di Fourier.

Equazione delle onde in una variabile spaziale associato al problema della corda vibrante. Metodo della separazione delle variabili per la costruzione formale della soluzione.

Il problema di Dirichlet con condizioni nulle al bordo. Costruzione del problema debole. Motivazioni della ricerca di soluzioni deboli.

L'equazione del calore e la frontiera parabolica. Il principio del massimo per l'equazione del calore. Applicazione a problemi di unicità della soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet.