

**Complementi di Analisi Matematica (Laurea Specialistica)**  
**Esempio di Prova Intermedia per l'A.A. 2006/2007**

*Prof. Fausto Ferrari*

**NOME E COGNOME**

**MATRICOLA**

---

**Esercizio 1.**

- a. Enunciare il Teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per un problema di Cauchy.
- b. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2ty^2}{(t^2 - 1)^2} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Per quali dati iniziali vale il Teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per (1)? Determinare la famiglia di soluzioni (dipendente dal dato iniziale) di (1).

- c. Studiare concavità, crescita e decrescita delle soluzioni di (1). Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1) al variare di  $(t_0, y_0)$ .

**Esercizio 2.**

- a. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' - 4y' - 5y = xe^x \quad (3)$$

e la soluzione (se esiste) di (3) che soddisfa le condizioni iniziali  $y(0) = 0$  e  $y'(0) = 0$ .

- b. Determinare gli autovalori associati al problema

$$\begin{cases} y'' - 4y' - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Determinare la soluzione (se esiste) di (3) che soddisfa le condizioni al contorno  $y(0) = 0$  e  $y(\pi) + y'(\pi) = 0$ .

**Esercizio Facoltativo.**

- a. Dato un sistema di equazioni differenziali lineari  $Y'(t) = AY$ , dove  $A : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  è una matrice  $n \times n$ , dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni ed una condizione sufficiente a garantire che un sistema di soluzioni sia fondamentale.
- b. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = (2a + 1)x - \frac{1}{9}y \\ y' = 4x + ay \end{cases} \quad (2)$$

Determinare se esistono dei valori del parametro  $a$  per cui la soluzione nulla di (2) sia stabile e per quali sia asintoticamente stabile.

- c. Scrivere per  $a = \frac{2}{3}$  la matrice esponenziale  $e^{tA}$  e scrivere poi la soluzione del problema di Cauchy corrispondente al dato iniziale  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ .

**N.B.** Gli studenti hanno a disposizione **due ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.