

Complementi di Analisi Matematica (Laurea Specialistica)

Esempio di Prova Intermedia A.A. 2006/2007

Prof. Fausto Ferrari

NOME E COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1.

- Enunciare il Teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per un problema di Cauchy.
- Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2y - 4t}{2t + y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Per quali dati iniziali vale il Teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per (1)? Determinare la famiglia di soluzioni (dipendente dal dato iniziale) di (1).

- Studiare concavità, crescita e decrescita delle soluzioni di (1). Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1) al variare di (t_0, y_0) .

Esercizio 2.

- Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + 2y' - 8y = t^2 \quad (5)$$

e la soluzione (se esiste) di (5) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

- Determinare gli autovalori associati al problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' - \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Determinare la soluzione (se esiste) di (5) che soddisfa le condizioni al contorno $y'(0) = 0$ e $y(\pi) = 0$.

Esercizio Facoltativo.

- Dato sistema di equazioni differenziali autonome

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(\mathbf{Y}), \quad (2)$$

dove $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{F} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, dare la definizione di integrale primo di (2).

- Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = -y^2 - 6x \end{cases} \quad (3)$$

Determinare un integrale primo di (3).

- Studiare la natura dei punti di equilibrio di (3) (usando il metodo di linearizzazione), determinarne la stabilità e tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni nel piano delle fasi.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **due ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.