

Complementi di Analisi Matematica (Laurea Specialistica)
Esempio di Prova parziale per l'A.A. 2006/2007

Prof. Fausto Ferrari

NOME E COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1.

- a. Enunciare un Teorema di esistenza **globale** di soluzione per un problema di Cauchy.
- b. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2te^{-y}}{t^2e^{-y} + 2ye^{-y}} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Per quali dati iniziali vale il Teorema di esistenza e unicità **locale** di soluzione per (1)? Determinare la famiglia di soluzioni (dipendente dal dato iniziale) di (1).

- c. Studiare concavità, crescita e decrescita delle soluzioni di (1). Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1) al variare di (t_0, y_0) .

Esercizio 2.

- a. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + 2y' + y = e^t + t \quad (5)$$

e la soluzione (se esiste) di (5) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

- b. Determinare gli autovalori associati al problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

Determinare la soluzione (se esiste) di (5) che soddisfa le condizioni al contorno $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

Esercizio 3. (Facoltativo)

- a. Dato sistema di equazioni differenziali lineari

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{A}(\mathbf{Y}), \quad (2)$$

dove $\mathbf{Y} \in \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni di (2). Enunciare le proprietà principali dell'insieme delle soluzioni di (2).

- b. Dato il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = x + y + t^2 \\ y'(t) = x + 3y + 2e^t \\ z'(t) = 3z \end{cases} \quad (3)$$

Determinare l'integrale di (3).

- c. Studiare la natura dei punti di equilibrio del sistema lineare omogeneo associato a (3).

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **due ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.