

Complementi di Matematica, Laurea specialistica

Prof. Fausto Ferrari

ESERCIZI IN PREPARAZIONE DELLA PROVA PARZIALE

Esercizio 1.

- Enunciare un Teorema di esistenza **globale** di soluzione per un problema di Cauchy.
- Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{2te^{-y}}{t^2e^{-y} + 2ye^{-y}} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Per quali dati iniziali vale il Teorema di esistenza e unicità **locale** di soluzione per (1)? Determinare la famiglia di soluzioni (dipendente dal dato iniziale) di (1).

- Studiare concavità, crescita e decrescita delle soluzioni di (1). Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1) al variare di (t_0, y_0) .

Esercizio 2.

- Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + 2y' + y = e^t + t \quad (5)$$

e la soluzione (se esiste) di (5) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

- Determinare gli autovalori associati al problema

$$\begin{cases} y'' + 2y' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Determinare la soluzione (se esiste) di (5) che soddisfa le condizioni al contorno $y(0) = 0$ e $y(1) = 0$.

Esercizio 3.

- Enunciare il Teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per un problema di Cauchy.
- Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{2x^2 + y^2}{2x^2 + xy} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Per quali dati iniziali vale il teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per (1)? Stabilire se ed in quali intervalli reali è applicabile il teorema di esistenza globale. Determinare la famiglia di soluzioni di (1) (dipendente dal dato iniziale (x_0, y_0)).

- Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1).

Esercizio 4. Enunciare il Teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per un problema di Cauchy.

- Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{5x^2 + y^2}{5x^2 + xy} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Per quali dati iniziali vale il teorema di esistenza e unicità locale di soluzione per (1)? Stabilire se ed in quali intervalli reali è applicabile il teorema di esistenza globale. Determinare la famiglia di soluzioni di (1) (dipendente dal dato iniziale (x_0, y_0)).

- Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1).

Esercizio 5.

Scrivere i coefficienti di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$

Esercizio 6.

Scrivere i coefficienti di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

Esercizio 7.

Scrivere i coefficienti di Fourier della funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$