

**Esempio di testo scritto per un appello di Complementi di Analisi Matematica
(CdL Specialistica in Ingegneria Civile e CdL in Ingegneria per l'Ambiente e il
Territorio) A.A. 2006/2007 Prof. F. Ferrari**

Esercizio 1

Risolvere il problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 36x. \end{cases}$$

- (a) Scrivere la soluzione ottenuta.
- (b) Qual è la regolarità della soluzione?
- (b) La soluzione è unica? Perché?

Esercizio 2. Se la seguente equazione alle derivate parziali

$$-\Delta u + u = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

ha soluzione $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

- (a). Esprimere formalmente la soluzione u per mezzo della trasformata di Fourier.
- (b). Se $f = 0$ qual la soluzione dellequazione?
- (b). Se $n = 1$ ricavare la relazione integrale che f deve soddisfare perché u sia soluzione.

Esercizio 3

- (a). Dato un sistema di equazioni differenziali lineari $Y' = AY$, dove $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una matrice 2×2 , dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni ed una condizione sufficiente a garantire che un sistema di soluzioni sia fondamentale. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = (2a + 1)x - \frac{1}{9}y \\ y' = 4x + ay. \end{cases}$$

- (b). Determinare se esistono dei valori del parametro a per cui la soluzione nulla del sistema sia stabile e per quali sia asintoticamente stabile.
- (c). Scrivere per $a = \frac{2}{3}$ la matrice fondamentale e scrivere poi la soluzione del problema di Cauchy corrispondente al dato iniziale $x(0) = 0, y(0) = 1$.