

Complementi di Analisi Matematica (Laurea Specialistica)
Esempio di Prova conclusiva per l'A.A. 2006/2007

Prof. Fausto Ferrari

NOME E COGNOME

MATRICOLA

Esercizio 1. Se la seguente equazione alle derivate parziali

$$-\Delta u + u = f,$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ha soluzione $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Allora

- a. Esprimere formalmente la soluzione u per mezzo della trasformata di Fourier.
- b. Se $f = 0$ qual è la soluzione dell'equazione?
- b. Se $n = 1$ ricavare la relazione integrale che f deve soddisfare perché u sia soluzione.

Esercizio 2.

- a. Dato un sistema di equazioni differenziali lineari $Y'(t) = AY$, dove $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una matrice 2×2 , dare la definizione di sistema fondamentale di soluzioni ed una condizione sufficiente a garantire che un sistema di soluzioni sia fondamentale.
- b. Dato il sistema

$$\begin{cases} x' = (2a + 1)x - \frac{1}{9}y \\ y' = 4x + ay \end{cases} \quad (2)$$

Determinare se esistono dei valori del parametro a per cui la soluzione nulla di (2) sia stabile e per quali sia asintoticamente stabile.

- c. Scrivere per $a = \frac{2}{3}$ la matrice fondamentale e scrivere poi la soluzione del problema di Cauchy corrispondente al dato iniziale $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Esercizio 3. (Facoltativo) La seguente funzione

$$\frac{e^{i(\sin(x+y))}}{(1 + (3x + 2y)^2)(1 + (-x + 4y)^2)}$$

è misurabile in \mathbb{R}^2 .

- a. È L^1 integrabile? Motivare la risposta.
- b. La seguente funzione

$$\frac{1}{(1 + (3x + 2y)^2)(1 + (-x + 4y)^2)}$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$? Motivare la risposta.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **due ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.