CORREZIONE ESEMPIO DI PROVA PARZIALE 3

FAUSTO FERRARI

ESERCIZIO 1

Consideriamo per $t^2 + 2y \neq 0$, la forma differenziale

$$\omega = -2te^{-y}dt + (t^2e^{-y} + 2ye^{-y})dy.$$

Posto $\omega_1 = -2te^{-y}$ e $\omega_2 = t^2e^{-y} + 2ye^{-y}$, si verifica che

$$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$$

è esatta, cioè $\frac{\partial \omega_1}{\partial y} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}$. L'integrale generale è assegnato in forma implicita dalla formula seguente

$$F(x, y) = c,$$

dove

$$F(x, y) = \int_{t_0}^{t} (-2se^{-y})ds + \int_{y_0}^{y} (t_0^2 e^{-s} + 2se^{-s})ds.$$

Pertanto

$$F(x, y) = -t^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y} + t_0^2 e^{-y_0} + 2y_0e^{-y_0} - 2e^{-y_0}.$$

In particolare posto

$$V(x, y) = -t^2e^{-y} - 2ye^{-y} - 2e^{-y}$$

gli insiemi di livello di $V = c$ descrivono le curve delle soluzioni della nostra equazione differenziale.

Al fine di descrivere l'andamento delle soluzioni, osserviamo che

$$y' \geq 0$$

se e solo se

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 + 2y > 0 \end{cases}$$

vel

$$\begin{cases} t \leq 0 \\ t^2 + 2y < 0. \end{cases}$$

Inoltre, riconoscendo che

$$y' = \frac{2t}{t^2 + 2y},$$

si ottiene:

$$y'' = \frac{2(t^2 + 2y) - 2t(2t + 2y')}{(t^2 + 2y)^2} = \frac{2(t^2 + 2y^2)^2 - 4t(t + \frac{2t}{t^2+2y})}{(t^2 + 2y)^2} = -2\frac{t^4 + 4t^2 - 4y^2}{(t^2 + 2y)^3}.$$

Pertanto $y'' > 0$ se e solo se in $\mathbb{R}^2 \setminus \{t^2 + 2y = 0\}$

$$\begin{cases} t^2 + 2y > 0 \\ t^4 + 4t^2 - 4y^2 < 0 \end{cases}$$

vel

$$\begin{cases} t^2 + 2y < 0 \\ t^4 + 4t^2 - 4y^2 > 0 \end{cases}$$

Date:

ESERCIZIO 2

Risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

L'equazione secolare è:

$$\gamma^2 + 2\gamma + 1 = 0.$$

Pertanto $\gamma = -1$ è l'unica soluzione con molteplicità 2 della nostra equazione. l'integrale generale dell'equazione omogenea si esprime come

$$c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$y'' + 2y' + y = t$$

e una dell'equazione

$$y'' + 2y' + y = e^t.$$

Utilizzando il cosiddetto *metodo per simpatia*, nel primo caso cerchiamo una soluzione sotto la forma $at + b$. Pertanto avremo

$$2a + at + b = t,$$

da cui seguono le condizioni $a = 1$ e $b = -2$. Quindi $y_{1p} = t - 2$. Analogamente, per la seconda equazione, cerchiamo una soluzione della forma ce^t. Otterremo

$$ce^t + 2ce^t + ce^t = e^t.$$

Come conseguenza deduciamo la seguente condizione

$$4c = 1,$$

da cui segue $c = \frac{1}{4}$ e quindi $y_{2p} = \frac{1}{4}e^t$. Finalmente, la soluzione particolare sarà $y_{1p} + y_{2p}$, mentre l'integrale è

$$c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t - 2 + \frac{1}{4}e^t.$$

Risolviamo ora il problema di Cauchy associato alle condizioni $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Imponendo le condizioni iniziali otterremo

$$\begin{cases} c_1 = \frac{7}{4} \\ -c_1 + c_2 + 1 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

Da cui segue $c_1 = \frac{7}{4}$ e $c_2 = \frac{2}{3}$. La soluzione cercata è quindi:

$$\frac{7}{4}e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t} + t - 2 + \frac{1}{4}e^t.$$

Risolviamo ora l'equazione caratteristica

$$\gamma^2 + 2\gamma + \lambda\gamma = 0.$$

Se $\lambda < 1$, allora l'integrale generale è

$$c_1 e^{\gamma_1 t} + c_2 e^{\gamma_2 t},$$

dove

$$\gamma_1 = -1 + \sqrt{1 - \lambda}, \ \ \gamma_2 = -1 - \sqrt{1 - \lambda}.$$

Se $\lambda = 1$, l'integrale generale è:

$$c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Infine se $\lambda > 1$ avremo

$$c_1 e^{-t} \sin(\sqrt{| 1 - \lambda |}t) + c_2 e^{-t} \cos(\sqrt{| 1 - \lambda |}t).$$

Esaminiamo il caso $\lambda < 1$, con le condizioni $y(0) = 0$ e $y'(1) = 0$.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\gamma_1 e^{\gamma_1} + c_2\gamma_2 e^{\gamma_2} = 0. \end{cases}$$

Il precedente sistema ha soluzione non banale se e solo se

$$\gamma_2 e^{\gamma_2} = \gamma_1 e^{\gamma_1}.$$

Se ne deduce che la precedente condizione è equivalente alla seguente

$$(-1 + \sqrt{1-\lambda})e^{\sqrt{1-\lambda}t} = (-1 - \sqrt{1-\lambda})e^{-\sqrt{1-\lambda}t}.$$

Quindi posto $p = \sqrt{1-\lambda}$ avremo

$$(-1 + p)e^{pt} = (-1 - p)e^{-pt},$$

da cui segue, per $p > 0$:

$$e^{2pt} = \frac{1+p}{1-p}.$$

La precedente equazione è soddisfatta soltanto se $p = 0$, cioè per $\lambda = 1$. Quindi l'unica soluzione è quella banale.

Nel secondo caso, quello per $\lambda = 1$, abbiamo immediatamente

$$\begin{cases} y(0) = c_1 = 0 \\ y'(1) = -c_1 e^{-1} = 0. \end{cases}$$

Quindi $\lambda = 1$ è un autovalore e abbiamo lo spazio delle autofunzioni $\mathrm{span}\{te^{-t}\}$. Infine, se $\lambda > 1$ si deduce immediatamente che

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1(\sin\sqrt{|\,1-\lambda\,|} - \sqrt{|\,1-\lambda\,|}\cos\sqrt{|\,1-\lambda\,|}) = 0. \end{cases}$$

Dunque in questo caso non avremo soluzioni banali solo se

$$\tan\sqrt{|\,1-\lambda\,|} = \sqrt{|\,1-\lambda\,|}.$$

Da uno studio grafico emerge che esistono infinite soluzioni della precedente equazione. Indichiamole con

$$\lambda_k > 0,$$

con $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. In tal caso lo spazio delle autofunzioni del problema ai limiti è:

$$\mathrm{span}\{e^{-t}\sin(t\sqrt{|\,1-\lambda_k\,|})\}.$$

Risolviamo infine il problema ai limiti

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^t + t \\ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0. \end{cases}$$

Sappiamo che l'integrale generale è:

$$c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t - 2 + \frac{1}{4}e^t.$$

Imponiamo le condizioni al contorno ottenendo

$$\begin{cases} y(0) = c_1 - \frac{7}{4} = 0 \\ y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} - 1 + \frac{1}{4}e = 0. \end{cases}$$

La soluzione del precedente sistema è $c_1 = \frac{7}{4}$, $c_2 = -e^2\frac{1}{4} - \frac{7}{4}$. In corrispondenza di tali costanti individueremo dall'integrale generale la soluzione del nostro problema ai limiti.

ESERCIZIO 3 Troviamo l'integrale generale del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x + 3y \\ z' = 3z. \end{cases}$$

Posto

$$A = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix}$$

avremo che il sistema omogeneo si scriverà nella forma compatta come:

$$U' = AU,$$

dove

$$U = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Calcoliamo gli autovalori della matrice A. L'equazione caratteristica è

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

da cui segue che gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 2) = 0.$$

Indichiamo con $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$ e $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$ le tre soluzioni della precedente equazione. Siano rispettivamente $A_1 = A - \lambda_1 I$, $A_2 = A - \lambda_2 I$ e $A_3 = A - \lambda_3 I$. Determiniamo i tre autospazi per $i = 1, 2, 3$

$$\mathrm{Ker}(A_i)$$

risolvendo rispettivamente i seguenti sistemi lineari per $i = 1, 2, 3$

$$A_i W = 0,$$

dove

$$W = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Otteniamo rispettivamente

$$\mathrm{Ker}(A_1) = \mathrm{span}\{(0, 0, 1)\},$$
$$\mathrm{Ker}(A_2) = \mathrm{span}\{(1, 1 + \sqrt{2}, 0)\}$$

e

$$\mathrm{Ker}(A_3) = \mathrm{span}\{-(1 + \sqrt{2}), 1, 0)\}.$$

Una matrice fondamentale del sistema omogeneo è quindi:

$$M(t) = \begin{bmatrix} 0, & e^{\lambda_2 t}, & -(1 + \sqrt{2})e^{\lambda_3 t} \\ 0, & (1 + \sqrt{2})e^{\lambda_2 t}, & e^{\lambda_3 t} \\ e^{3t}, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando il metodo delle variazioni delle costanti di Lagrange possiamo trovare una soluzione particolare del sistema omogeneo risolvendo il sistema di equazioni differenziali seguente in C

$$C' = M^{-1} \begin{bmatrix} t^2 \\ 2e^t \\ 0 \end{bmatrix},$$

dove

$$C = C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ c_3(t) \end{bmatrix}$$

e M^{-1} è la matrice inversa di M. In particolare abbiamo:

$$M^{-1} = \frac{1}{(4+2\sqrt{2})e^{7t}} \begin{bmatrix} 0, & 0, & (4+2\sqrt{2})e^{4t} \\ e^{(5-\sqrt{2})t}, & (1+\sqrt{2})e^{(5-\sqrt{2})t}, & 0 \\ -(1+\sqrt{2})e^{(5+\sqrt{2})t}, & e^{(5+\sqrt{2})t}, & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto otteniamo

$$C(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \int_0^t (s^2 e^{(5-\sqrt{2})s} + 2(1+\sqrt{2})e^{(6-\sqrt{2})s})ds \\ \int_0^t (-s^2(1+\sqrt{2})e^{(5+\sqrt{2})s} + e^{(6+\sqrt{2})s})ds \end{bmatrix}.$$

Quindi l'integrale generale si ottiene considerando

$$M(t)(C(t)+B),$$

dove

$$B = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \end{bmatrix}$$

e $B \in \mathbb{R}^3$.