PRIMO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio A.A. 2006/2007

Commissione Prof. F. Ferrari

Cognome: Nome:

Corso di Laurea: Matricola

Esercizio 1

Sia dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2. \end{cases} \tag{1}$$

(a). (4 p.ti) Calcolare una matrice fondamentale di soluzioni per il sistema (1).

(b). (1 p.ti) Stabilire se l'origine è stabile per (1)

(c). (3 p.ti) Dato

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 - y_2 - 1, \end{cases} \tag{2}$$

calcolare l'integrale generale di (2)

(d). (2 p.ti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Esercizio 2

(a). (2 p.to). Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Scrivere la convoluzione tra f e g.

(b). (2 p.to). Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Scrivere la trasformata di Fourier della convoluzione tra f e g.

(c). (1 p.to). Scrivere la trasformata di Fourier della funzione $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ così definita.

$$h(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(d) (1 p.to). Se $\chi_{[-1,1]}$ indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$, cioè $\chi_{[-1,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{se } x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Calcolare la trasformata di Fourier di $\chi_{[-1,1]}$.

(e). (2 p.ti). Calcolare la trasformata di Fourier di $\chi * h$ (dove h è la funzione definita nel punto (c)).

Esercizio 3

(a). (4 p.ti). Risolvere il seguente problema agli autovalori.

$$\begin{cases} y'' = \frac{\lambda}{5} y \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

determinando gli autovalori e lo spazio delle autofunzioni.

(b) (3) Se per ogni $n \in \mathbb{N}$, λ_n indica un autovalore del problema (4), scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$T' = \lambda_n T$$

(c). (2 p.ti). Sia ora dato il seguente problema alle derivate parziali

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 5 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}, \ \ x \in (0, \pi), \ \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \\ u(x,0) = x(x-\pi), \quad x \in [0, \pi]. \end{cases} \tag{5}$$

Applicare il metodo della sepazione delle variabili per calcolare una soluzione del problema (5) individuando i corrispondenti problemi ai limiti da risolvere.

(d). (3 p.ti). Scrivere una soluzione del problema (5).

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **tre ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.