ALCUNI ULTERIORI ESEMPI DI COME SI COSTRUISCE UNA MATRICE FONDAMENTALE

FAUSTO FERRARI

Caso di tre autovalori di molteplicità 1 per un matrice 3×3

Determinare un sistema fondamentale per il sistema di equazioni differenziali omogeneo di ordine uno 3 equazioni.

$$\begin{cases} x' = 1x \\ y' = 2y \\ z' = 3z \end{cases}$$

La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ci sono tre autovalori: 1 e 2 e 3, tutti di molteplicità 1. Quindi

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A - I) + \mathrm{Ker}(A - 2I) + \mathrm{Ker}(A - 3I).$$

Quindi se $v_1 \in \mathrm{Ker}(A - I)$, $v_2 \in \mathrm{Ker}(A - 2I)$ e $v_2 \in \mathrm{Ker}(A - 3I)$, allora

$$e^{tA}v_1 = e^t v_1$$

$$e^{tA}v_2 = e^{2t} v_2$$

$$e^{tA}v_3 = e^{2t} v_3$$

costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni del nostro sistema di equazioni differenziali, lineare omogeneo a coefficienti costanti. Inoltre

$$[e^t v_1, e^{2t} v_2, e^{3t} v_3]$$

è una matrice fondamentale.

Nota bene: in questo schema, che dovrebbe contribuire a chiarire come si procede, non ho calcolato esplicitamente i vettori v_1, v_2 e v_3. Gli studenti sono invitati a completare l'esercizio completando i calcoli.

Caso di un autovalore con molteplicità 2 e uno di molteplicità 1 per un matrice 3×3

Determinare un sistema fondamentale per il sistema di equazioni differenziali omogeneo di ordine uno 3 equazioni.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \\ z' = 3z \end{cases}$$

La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ci sono due autovalori: 2 e 3, rispettivamente di molteplicità 2 e 1. Quindi

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(A - 2I)^2 + \mathrm{Ker}(A - 3I).$$

Date: 12/12/2006.

Posso scegliere $v_1 \in \mathrm{Ker}(A-2I)$ e $v_2 \in \mathrm{Ker}(A-2I)^2$ in modo tale che v_1 e v_2 siano linearmente indipendenti. Ricordiamo che $\mathrm{Ker}(A-2I) \subset \mathrm{Ker}(A-2I)^2$. Infine prendiamo $v_3 \in \mathrm{Ker}(A-3I)$.

A questo punto per costruire un sistema fondamentale di soluzioni, ovvero una matrice fondamentale consideriamo le tre seguenti funzioni:

$$e^{tA}v_1 = e^{2t}v_1$$
$$e^{tA}v_2 = e^{2t}(v_1 + t(A-2I)v_1) = e^{2t}(v_1 + t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_1)$$

e

$$e^{tA}v_1 = e^{2t}v_3.$$

Ricordiamo che la ragione di questa rappresentazione si basa sul fatto che la serie con cui si esprime $e^{tA}w$ si riduce ad una sommatoria finita di elementi quando w è un vettore appartenete all'autospazio generalizzato. Ricordiamo infine che l'autospazio generalizzato è il nucleo dell'operatore $(A-\lambda I)^m$ dove m è la molteplicità dell'autovalore λ.

A questo punto costruiremo una matrice fondamentale considerando le tre funzioni precedenti a valori in $\mathbb{R}^3$ come colonne di una matrice. Letteralmente

$$[e^{2t}v_1, e^{2t}(v_1 + t\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} v_1), e^{2t}v_3]$$

Nota bene: in questo schema, che dovrebbe contribuire a chiarire come si procede, non ho calcolato esplicitamente i vettori v_1, v_2 e v_3. Gli studenti sono invitati a completare l'esercizio completando i calcoli.

Caso di un autovalore con molteplicità 3 **per un matrice** 3×3

Determinare un sistema fondamentale per il sistema di equazioni differenziali omogeneo di ordine uno 3 equazioni.

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \\ z' = 2z \end{cases}$$

La matrice associata è:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2 ha molteplicit à 3. Inoltre $\mathrm{Ker}(A-2I)^3 = \mathbb{R}^3$. Quindi posso procedere prendendo

$$v_1 \in \mathrm{Ker}(A-2I)$$

mentre gli altri due vettori indichiamoli con v_1 e v_2 li sceglieremo in $\mathbb{R}^3$ in modo tale che siano linearmente indipendenti con quello già fissato cioè v_1. Quindi le tre soluzioni che costituiranno un stema fondamentale di soluzioni, ovvero (se considerate come colonne) una matrice fondamentale di soluzioni sono formalmente:

$$e^{tA}v_1 = e^{2t}v_1,$$
$$e^{tA}v_2 = e^{2t}(v_2 + t(A-2I)v_2),$$
$$e^{tA}v_3 = e^{2t}(v_3 + t(A-2I)v_3 + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2v_3)$$

Pertanto una matrice fondamentale si ottiene considerando:

$$[e^{2t}v_1, e^{2t}(v_2 + t(A-2I)v_2), e^{2t}(v_3 + t(A-2I)v_3 + \frac{t^2}{2}(A-2I)^2v_3)].$$

In realtà in questo caso

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \mathrm{Ker}(A-2I)^2 = \mathrm{Ker}(A-2I)^3$$

infatti

$$(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$\mathrm{Ker}(A-2I) = \mathbb{R}^3$$

e come conseguenza

$$e^{tA}v_2 = e^{2t}(v_2 + t(A-2I)v_2) = e^{2t}(v_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_2) = e^{2t}v_2$$

e

$$\begin{aligned} e^{tA}v_3 &= e^{2t}(v_3 + t(A-2I)v_3 + \frac{t}{2}(A-2I)^2 v_3) \\ &= e^{2t}(v_3 + t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} v_3 + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 v_3) = e^{2t}v_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Pertanto

$$[e^{2t}v_1, e^{2t}v_2, e^{2t}v_3]$$

è un sistema fondamentale di soluzioni.

Attenzione, si tratta di un caso particolare.

In generale

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda I) \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^2 \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^3,$$

anche propriamente. Quindi, sempre considerando un caso generale relativo ad un autovalore di molteplicità 3, potrebbero presentarsi anche casi in cui

$$(A-\lambda I)v_2 \neq \{0\},$$
$$(A-\lambda I)v_3 \neq \{0\}$$

e

$$(A-\lambda I)^2 v_3 \neq \{0\}.$$

Se dovesse capitare, dopo aver determinato le matrici $(A-\lambda I)$ e $(A-\lambda I)^2$ bisognerà calcolare esplicitamente $(A-\lambda I)v_2$ e $(A-\lambda I)^2 v_2$ (si tratta di un prodotto tra matrici e vettori). Per cui la matrice fondamentale sarà, in generale,

$$[e^{\lambda t}v_1, e^{\lambda t}(v_2 + t(A-\lambda I)v_2), e^{2t}(v_3 + t(A-2I)v_3 + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2 v_3].$$