Esercizio 1

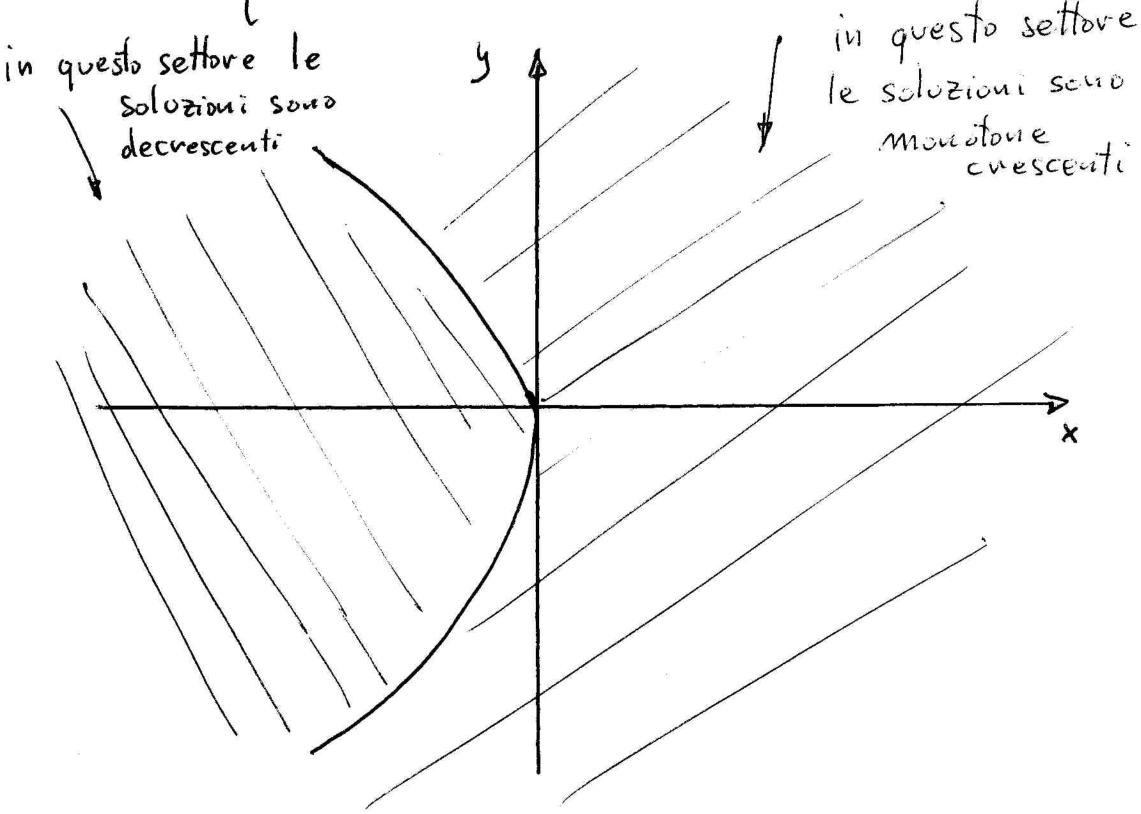
$$(PC) \quad \begin{cases} y' = \dfrac{1}{3x+y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(i) Se $3x+y^2 \neq 0$, allora $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x+y^2=0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^∞. Pertanto, per ogni $(x_0, y_0) \in D$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x+y^2=0\}$, esiste una ed una sola soluzione locale del (PC). (Teorema di Peano-Picard).

(ii) $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(D)$, allora le soluzioni locali sono di classe C^∞ in un intorno di x_0, per $(x_0, y_0) \in D$.

(iii) Le soluzioni del (PC) sono monotone crescenti se

$$y' \geq 0 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{3x+y^2} \geq 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \iff 3x+y^2 \geq 0$$



(iv) Le soluzioni sono convesse se e solo se $\begin{cases} y'' \geq 0 \\ (x,y) \in D \end{cases}$.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x+y^2}\right) = \frac{-(3+2yy')}{(3x+y^2)^2} = -\frac{3+2y\,\frac{1}{3x+y^2}}{(3x+y^2)^2}$$

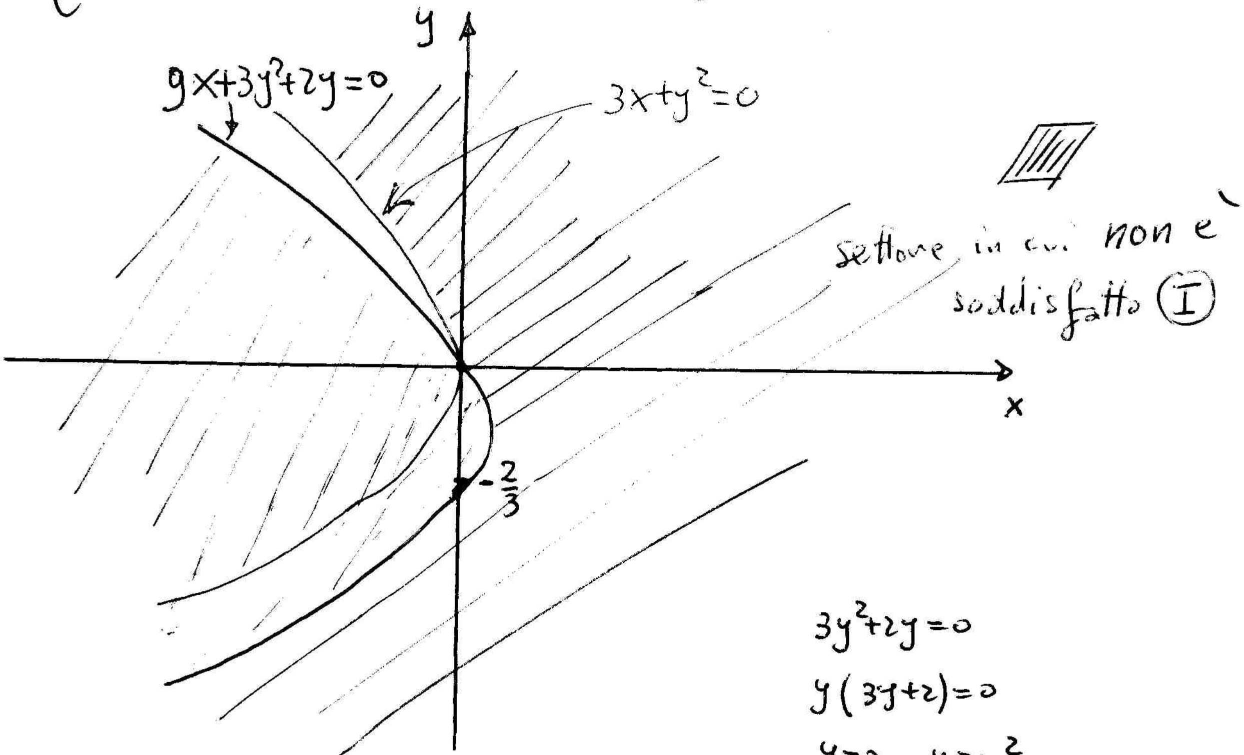
$$= -\frac{1}{(3x+y^2)^2}\;\frac{9x+3y^2+2y}{(3x+y^2)}.$$

Quindi

$$\begin{cases} y'' \geq 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{9x+3y^2+2y}{3x+y^2} \geq 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \iff \left\{ \dfrac{9x+3y^2+2y}{3x+y^2} \leq 0 \right.$$

Pertanto

$$\text{I} \begin{cases} 9x+3y^2+2y \geq 0 \\ 3x+y^2 < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \text{II} \begin{cases} 9x+3y^2+2y \leq 0 \\ 3x+y^2 > 0 \end{cases}$$

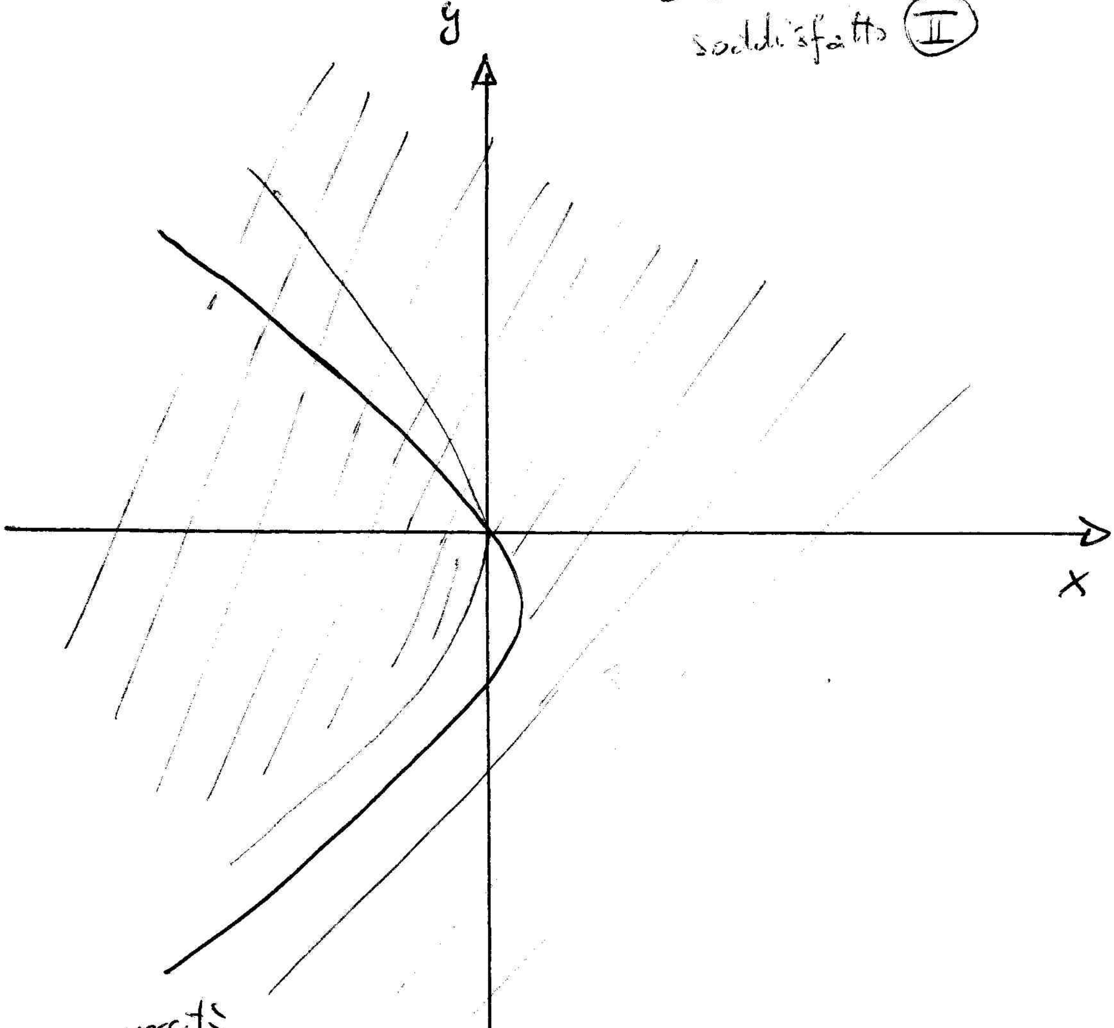


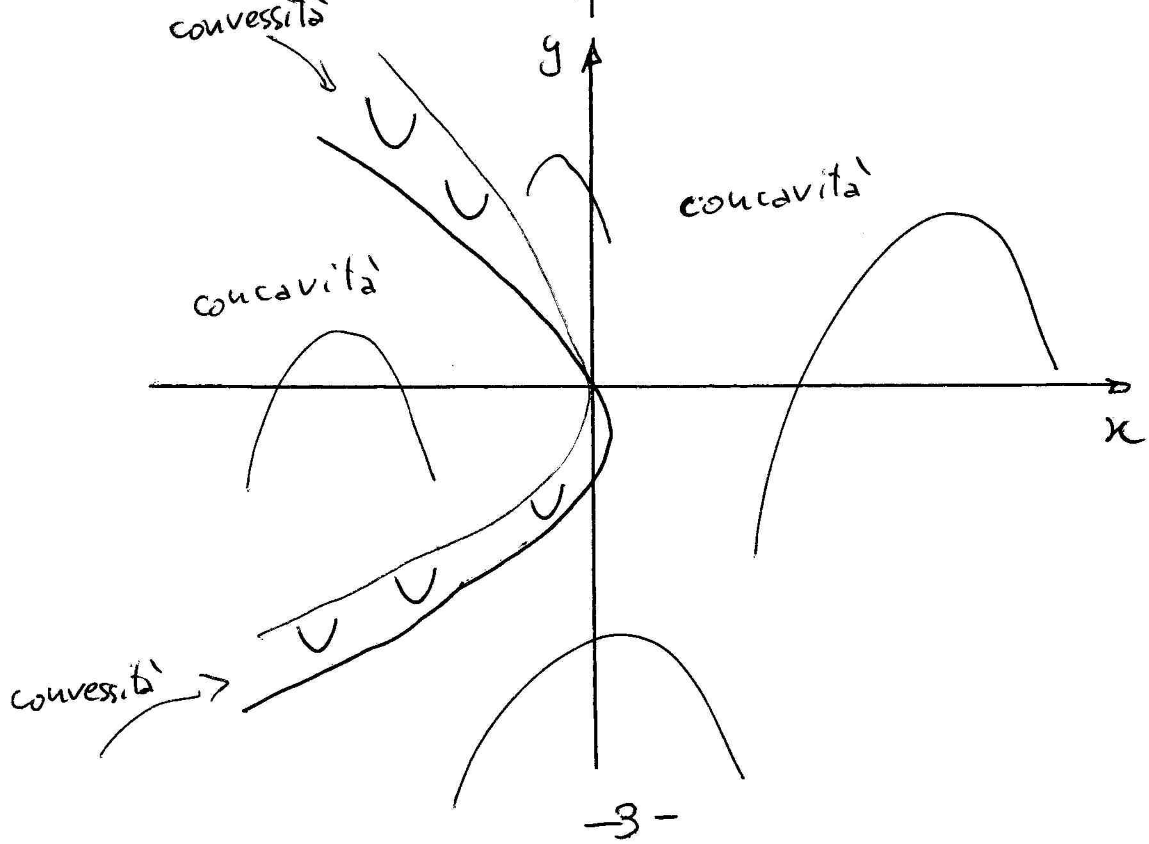
$3y^2+2y=0$

$y(3y+2)=0$

$y=0\ ,\ y=-\frac{2}{3}$

Settore in cui non è soddisfatto (II)





Disegniamo il grafico indicativo delle soluzioni.
Ricaviamo prima l'espressione degli zeri di y''.
Quindi

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-27x}}{3}$$

Verifichiamo se $y = -\frac{1+\sqrt{1-27x}}{3}$ e $y = \frac{-1-\sqrt{1-27x}}{3}$ sono soluzioni dell'eq. diff.?

$$y' = -\frac{27}{3}\frac{1}{2\sqrt{1-27x}} \quad \text{e} \quad f(x,y(x)) = \frac{1}{3x+\left(\frac{-1+\sqrt{1-27x}}{3}\right)^2}$$

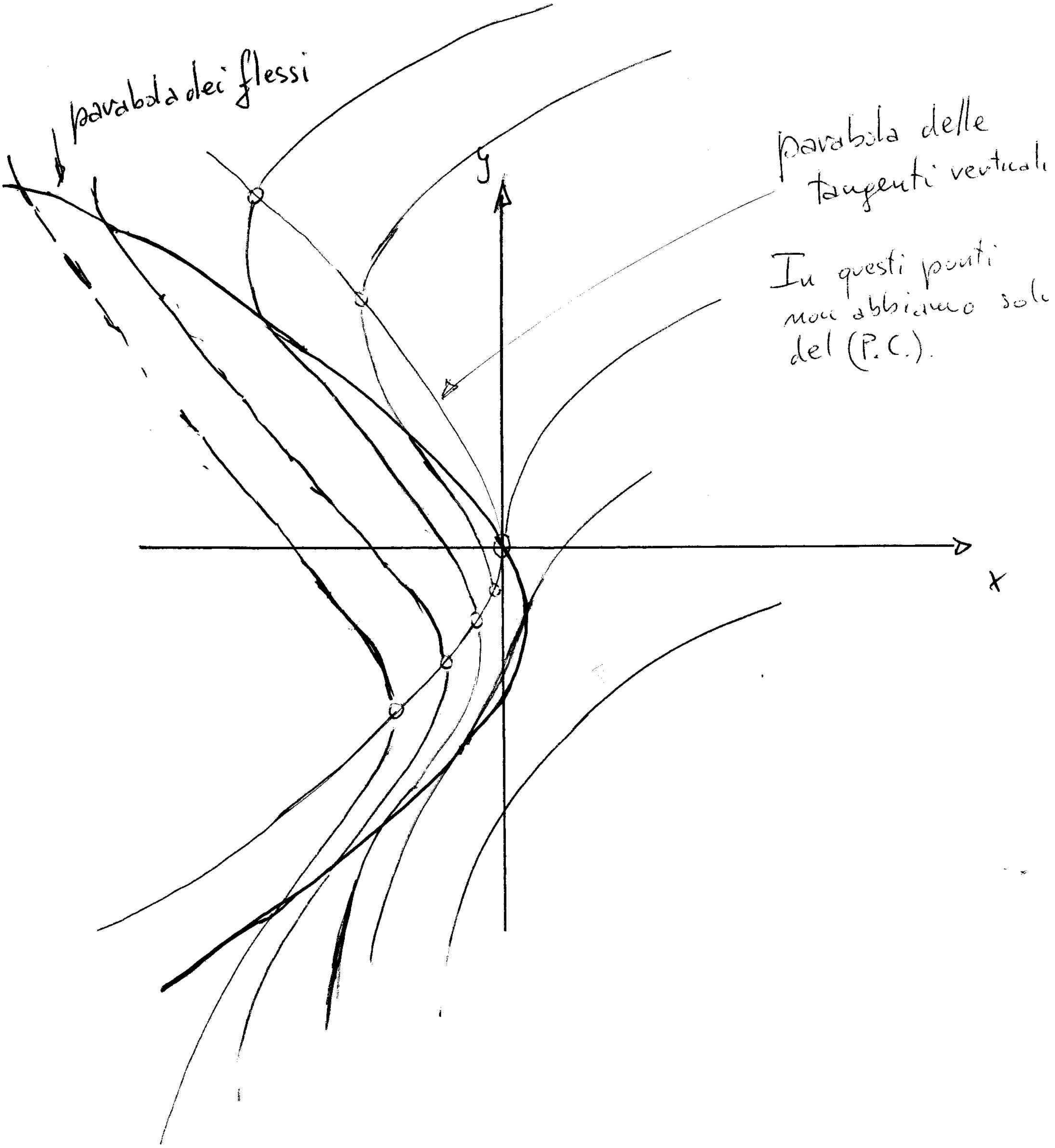
$$= \frac{1}{3x+\frac{1-2\sqrt{1-27x}+1-27x}{9}} = \frac{9}{\cancel{27x}+2-2\sqrt{1-27x}\cancel{-27x}}$$

$$= \frac{9}{2\left(1-\sqrt{1-27x}\right)}$$

Analogamente $y' = \frac{27}{3}\frac{1}{2\sqrt{1-27x}}$ e $f(x,y(x)) = \frac{1}{3x+\left(\frac{1+\sqrt{1-27x}}{3}\right)^2}$

$$= \frac{1}{3x+\frac{1+2\sqrt{1-27x}+1-27x}{9}} = \frac{1}{\frac{2+2\sqrt{1-27x}}{9}} = \frac{9}{2\left(1+\sqrt{1-27x}\right)}$$

Quindi non sono soluzioni.


parabola dei flessi
parabola delle tangenti verticali
In questi punti non abbiamo sol. del (P.C.).
y
x