Risolvere, usando il metodo di separazione delle variabili il seguente problema

$$(PCN)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & (x,t) \in (0,1)\times(0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Cerchiamo le soluzioni supponendo che $u(x,t) = X(x)\,T(t)$. Quindi, sostituendo nella equazione alle derivate parziali, otteniamo $XT' - X''T = 0$. Separiamo le variabili:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T}.$$

Pertanto ciò sarà possibile se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{X''}{X} = \lambda \qquad \text{e} \qquad \frac{T'}{T} = \lambda.$$

D'altra parte le condizioni al bordo sono:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = X'(1)T(t) = 0$$

Se escludiamo il caso $T(t) \equiv 0$, che produce la soluzione banale $u(x,t) \equiv 0$, otteniamo le condizioni ai limiti $X'(0) = 0$ e $X'(1) = 0$.

Pertanto abbiamo i seguenti problemi agli autovalori da risolvere

$$(a) \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & x \in (0,1) \\ X'(0) = 0 \\ X'(1) = 0 \end{cases} \quad e \quad (b) \begin{cases} T' - \lambda T = 0 \\ \diagup \end{cases}$$

Per quanto riguarda (a) abbiamo che le soluzioni sono

(1) $\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$, se $\lambda > 0$

(2) $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ se $\lambda = 0$

(3) $\gamma_1 = \pm i\sqrt{|\lambda|}$ se $\lambda < 0$.

Caso (1)

$V_\lambda = \text{span}\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$. Pertanto ogni soluzione di $X'' - \lambda X = 0$ si esprime come

$c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

Imponendo le condizioni ai limiti ricaviamo

$$\begin{cases} c_1\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}c_2 = 0 \\ c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 - c_2 = 0 \\ e^{\sqrt{\lambda}}c_1 - e^{-\sqrt{\lambda}}c_2 = 0 \end{cases}$$

. Il sistema non avrà soluzione banale se $\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{\lambda}} & -e^{-\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} = 0$.

Quindi $-e^{-\sqrt{\lambda}}+e^{\sqrt{\lambda}}=0 \iff e^{2\sqrt{\lambda}}=1 \iff \lambda=0$

Valore da scartare perché $\lambda>0$.

Caso (2)

$V_2=\text{span}\{1, x\}$. Quindi l'integrale generale è c_1+c_2x. Imponendo le condizioni al contorno otteniamo:

$$\begin{cases} c_2=0 \\ c_2=0. \end{cases}$$

Pertanto $\lambda=0$ è autovalore di (a) e le autosoluzioni associate sono generate dalla funzione 1.

Caso (3)

$V_2=\text{span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|}x), \sin(\sqrt{|\lambda|}x)\}$. Quindi l'integrale generale è

$$c_1\cos(\sqrt{|\lambda|}x)+c_2\sin(\sqrt{|\lambda|}x).$$

Imponendo le condizioni ai limiti di (a) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_2\cdot\sqrt{|\lambda|}=0 \\ -\sqrt{|\lambda|}c_1\sin(\sqrt{|\lambda|})+c_2\sqrt{|\lambda|}\cos(\sqrt{|\lambda|})=0 \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 \sin(\sqrt{|\lambda|}) = 0 . \end{cases}$$

Pertanto non avremo soluzione banale se $\sin(\sqrt{|\lambda|}) = 0$. Quindi $\sqrt{|\lambda|} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; inoltre $|\lambda| = k^2\pi^2$ con $-\lambda = k^2\pi^2$. Cioè $\lambda_k = -k^2\pi^2$ sono autovalovori per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Infine, dovendo essere $c_2 = 0$, ricaviamo che le autosoluzioni associate a λ_k sono generate da $\cos(\sqrt{|\lambda_k|}\, x)$.

Per quanto riguarda il problema (b) avremo:

Caso (b1) $\emptyset$.

caso (b2) $T' = 0$, da cui segue l'integrale generale generato da 1.

Caso (b3) $T' + k^2\pi^2 T = 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, da cui segue l'integrale generale generato da $e^{-k^2\pi^2 t}$.

Ricapitolando: se $k=0$, allora

$u_0(x,t) = A_0$ è soluzione di $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$.

Se $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora $u_k(x,t) = A_k\, e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)$

è soluzione di $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Inoltre per ogni $k \in \mathbb{N}$, u_k soddisfa anche le condizioni al bordo. L'operatore del calore è lineare quindi la somma finita delle u_k è ancora soluzione. In particolare cercheremo una soluzione di (PCN) nella forma

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)$$

con $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ da determinare.

Formalmente, se esiste una soluzione nella forma $A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)$, allora imponendo la condizione iniziale $u(x,0) = f(x)$ deve verificarsi che

$$\text{(CI)} \quad A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\pi x) = f(x).$$

La funzione $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Per ricondurci al caso di una funzione di cui conosciamo la serie di Fourier per prima cosa effettuiamo un cambiamento di variabili definendo

$$\tilde{f} : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

Poi estendiamo $\tilde{f}$ su $[-\pi, 0)$

come funzione pari ponendo $h : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{se } x \in [0, \pi] \\ \tilde{f}(-x) & \text{se } x \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Infine consideriamo $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ come la funzione che ristretta a $[-\pi, \pi]$ coincide con $h(x)$ definita estendendo h con periodo 2π.

I coefficienti di Fourier di h sono

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \cos(kx)\, dx \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(kx)\, dx \quad , \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

In particolare ricaveremo, essendo h pari,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(x) \cos(kx)\, dx \quad e \quad b_k = 0$$

Poi, ricordando la definizione di $\tilde{f}$, e ponendo $\frac{x}{\pi} =:$ otteniamo:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f\left(\frac{x}{\pi}\right) \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi} \pi \int_0^1 f(y) \cos(\pi k y)\, dy$$

$$= 2 \int_0^1 f(y) \cos(\pi k y)\, dy.$$

Pertanto $f \sim \sum_{K=1}^{\infty} a_K \cos(\pi K x) + \frac{a_0}{2}$.

Affinché sia soddisfatta (CI) fisseremo

$A_0 = \frac{a_0}{2}$ e $A_K = a_K$ per $K \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Possiamo allora considerare come prototipo di soluzione di (PCN) la funzione

$$v(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{K=1}^{\infty} a_K e^{-K^2\pi^2 t} \cos(K\pi x).$$

(Ip) Supponiamo che $f \in C^1([0,1])$ e $f'(0) = f'(\pi)$.

La funzione $v \in C([0,1])$ perché v è una serie di funzioni continue che converge totalmente su $[0,1]$. Infatti

$$\sum_{K=1}^{\infty} \left| a_K e^{-K^2\pi^2 t} \cos(K\pi x) \right| \leq \sum_{K=1}^{\infty} |a_K| < +\infty$$

Perché la funzione h costruita in precedenza nelle ulteriori ipotesi (Ip) è C^1 su $\mathbb{R}$ 2π periodica, quindi la serie di Fourier converge totalmente.

Inoltre per ogni $(x,t) \in [0,1] \times [\varepsilon, +\infty)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{K=1}^{\infty} (-K^2\pi^2 a_K) e^{-K^2\pi^2 t} \cos(K\pi x)$$

con $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere.

Perché $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} u_k(x,t)$ converge uniformemente, in quanto è totalmente convergente.

Infatti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{[0,1]\times[\varepsilon,+\infty)} \left| -k^2\pi^2 a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x) \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \pi^2 |a_k| \sup_{[0,1]\times[\varepsilon,+\infty)} \left| k^2 e^{-k^2\pi^2 t} \right|$$

$$\leq \pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \, k^2 e^{-\varepsilon k^2 \pi^2} \leq M\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\varepsilon k^2\pi^2} < +\infty$$

perché $|a_k| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

In modo analogo si prova che

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^k} = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \pi^2 k^2 e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)$$

e sono soddisfatte le condizioni al bordo delle derivate prime.

Pertanto la soluzione di (PCN) è, nelle ipotesi (Ip),

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)$$

con $a_k = 2\int_0^1 f(x) \cos(k\pi x)\, dx \qquad k \in \mathbb{N}$.