

SESTO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Prof. F. Ferrari

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e delle Risorse

Esercizio 1 (punteggio complessivo dell'esercizio (9 p.ti)).

Dato il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x' = 6x + 2y \\ y' = 2x + 3y, \end{cases}$$

- (i) (5 p.ti). Determinare un sistema fondamentale di soluzioni e l'integrale generale.
- (ii) (4 p.ti). Calcolare la soluzione del problema di Cauchy con i seguenti dati iniziali:
 $x(0) = 1; y(0) = 0$.

Esercizio 2 (punteggio complessivo dell'esercizio (9 p.ti)).

Assegnata la funzione $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$:

- (i) (6 p.ti), scrivere la serie di Fourier della funzione f avendo cura di calcolarne i coefficienti;
- (ii) (3 p.ti), studiare la convergenza della serie di Fourier ottenuta.

Esercizio 3 (punteggio complessivo dell'esercizio (12 p.ti)).

Dato il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} y'' + 5y = f, \\ y(-\pi) = 0, \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

con $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Si chiede:

- (i) (4 p.ti), di scriverne la formulazione debole (o variazionale) individuando lo spazio di Hilbert in cui cercare l'eventuale soluzione;
- (ii) (2 p.ti), di definire quali sono la forma bilineare e il funzionale lineare che intervengono nel problema variazionale;
- (iii) (3 p.ti), di provare che la suddetta forma bilineare al punto (ii) è continua e coerciva;
- (iv) (3 p.ti), di provare che il suddetto funzionale lineare al punto (ii) è continuo.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **3 ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.