

PRIMO APPELLO DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Prof. F. Ferrari

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Chimica e di processo e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e delle Risorse

Cognome.....Nome.....Mat.....CdL.....

Esercizio 1 (7 punti)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{3x+y^2} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

- (i) (1 p.to) per quali dati iniziali (x_0, y_0) si ha esistenza e unicità locale delle soluzioni?
- (ii) (1 p.to) qual è la regolarità delle soluzioni del problema di Cauchy?
- (iii) (2 p.ti) in quali intervalli le soluzioni sono monotone crescenti?
- (iv) (3 p.ti) in quali intervalli le soluzioni sono convesse?

Esercizio 2 (7 punti)

Sia $\phi : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(1) \quad \phi(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0, \frac{5}{2}) \\ 5 - x & \text{se } x \in [\frac{5}{2}, 5]. \end{cases}$$

- (i) (1 p.to) Disegnare il grafico di ϕ .
- (ii) (1 p.to) Prolungare ϕ su $[-5, 0]$ definendo una nuova funzione $\tilde{\phi} : [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ in modo tale che $\tilde{\phi}$ sia dispari su $[-5, 5]$ e per ogni $x \in [0, 5]$, $\tilde{\phi} = \phi$.
- (iii) (2 p.ti) Scrivere la serie di Fourier associata a $\tilde{\phi}$.
- (iv) (3 p.ti) Calcolare i coefficienti di Fourier della serie ottenuta.

Esercizio 3 (16 punti)

Risolvere il seguente problema di Cauchy Dirichlet mediante separazione di variabili:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, & (0, 5) \times (0, 100) \\ u(0, t) = u(5, t) = 0, & t \in [0, 100] \\ u(x, 0) = \phi, & x \in [0, 5]. \end{cases}$$

dove ϕ è la funzione definita in (1).

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **2h** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.