PRIMA PROVA PARZIALE DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA

Prof. F. Ferrari

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Chimica e di processo e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e delle Risorse

Cognome...Nome.....................................Mat.............................CdL.............

Esercizio 1 .

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3x+y+2}{2+3x} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

(i) (1 p.to) per quali dati iniziali si ha esistenza e unicità locale delle soluzioni?

(ii) (1 p.to) qual è la regolarità locale delle soluzioni del problema di Cauchy ?

(iii) (1 p.to) in quali intervalli le soluzioni sono monotone crescenti?

(iv) (2 p.ti) in quali intervalli le soluzioni sono convesse?

(Facoltativo) (1 p.to, non utile per l'ammissione alla seconda prova parziale) risolvere il problema di Cauchy.

(Facoltativo) (2 p.ti, non utile per l'ammissione alla seconda prova parziale) disegnare il grafico qualitativo delle soluzioni.

Esercizio 2

Classificare la seguente equazione a derivate parziali in due variabili rispondendo alle domande:

$$(x-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (y-3)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (y-3)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} + \cos x \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

(i) (0.5 p.ti) in quale dominio è ellittica;

(ii) (0.5 p.ti) in quale dominio è parabolica;

(iii) (0.5 p.ti) in quale dominio è iperbolica.

Rispondere alle domande motivando ogni passaggio.

Esercizio 3

Dato il seguente problema agli autovalori:

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ \ (0,2) \\ y(0) + y(2) = 0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

(i) (2 p.ti) calcolare gli autovalori del problema;

(ii) (2 p.ti) calcolare le autosoluzioni del problema;

(iii) (1 p.to) calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y'' + 4y = 0$.

(iv) (Facoltativo, (1 p.to) non utile per l'ammissione alla seconda prova parziale) scrivere l'integrale generale dell'equazione $y'' + 4y = x$.

Esercizio 4

Dato il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2, \end{cases}$$

(i) (2 p.ti) scrivere una matrice fondamentale del sistema omogeneo.

Date: 19/11/2007.

(ii) (1,5 p.ti) risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$.

(iii) (Facoltativo 1 p.to non utile per l'ammissione alla seconda prova parziale) scrivere l'integrale generale del sistema non omogeneo,

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 + 1. \end{cases}$$

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **1h 30'** per svolgere gli esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari. Motivare ogni risposta.

1. Correzione

Esercizio 1

La funzione è di classe C^∞ su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 2+3x \neq 0\}$. Quindi, dal Teorema di Peano Picard, segue l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy per ogni $(x_0, y_0) \in D$. La regolarità locale della soluzione è C^∞ in D perché $f \in C^\infty(D)$.

Per quanto riguarda la monotonia delle soluzioni sarà sufficiente considerare l'insieme in cui $y' \geq 0$. Deduciamo gli intervalli in cui y' è non negativo risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{3x+y+2}{2+3x} \geq 0 \\ (x,y) \in D \end{cases} \tag{1}$$

Quindi y è monotona crescente se $x > -\frac{2}{3}$ e $y > -3x - 2$ oppure se $x < -\frac{2}{3}$ e $y < -2 - 3x$.

Per rispondere al punto (iv) calcoliamo la derivata seconda. Ciò è possibile in virtù del fatto che, dove esistono, le soluzioni sono C^∞. In particolare anche C^2. Quindi

$$y'' = \left(\frac{3x+y+2}{2+3x}\right)' = \frac{(3+y')(2+3x) - 3(3x+y+2)}{(2+3x)^2} = \frac{3(2+3x) + \frac{3x+y+2}{2+3x}(2+3x) - 3(3x+y+2)}{(2+3x)^2}$$
$$= \frac{3(2+3x) + 3x + y + 2 - 3(3x+y+2)}{(2+3x)^2} = \frac{3(2+3x) - 2(3x+y+2)}{(2+3x)^2} = \frac{2+3x-2y}{(2+3x)^2}$$

Quindi y è convessa in $y \leq 1 + \frac{3}{2}x$ e $x > -\frac{2}{3}$ oppure per $y \leq 1 + \frac{3}{2}x$ e $x < -\frac{2}{3}$.

Per quanto riguarda la parte facoltativa, osserviamo che l'equazione differenziale è lineare non omogenea. Infatti $y' = \frac{y}{2+3x} + 1$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è generato dalla funzione $e^{\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{2+3t}}$. Cioè, per esempio, da $\mid 2+3x \mid^{\frac{1}{3}}$. Possiamo poi determinare una soluzione particolare con il metodo della variazione delle costanti di Lagrange ottenendo che $\alpha'(x) \mid 2+3x \mid^{\frac{1}{3}} = 1$. Quindi ricaviamo che $\alpha(x) = \frac{1}{2} \mid 2+3x \mid^{\frac{2}{3}} \operatorname{sgn}(2+3x)$.

Quindi $\frac{1}{2}(2+3x) + C \mid 2+3x \mid^{\frac{1}{3}}$ è l'integrale generale dell'equazione non omogenea. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = \frac{1}{2}(2+3x) + \left(y_0 - \frac{1}{2}(2+3x_0)\right)\frac{\mid 2+3x \mid^{\frac{1}{3}}}{\mid 2+3x_0 \mid^{\frac{1}{3}}}.$$

Osserviamo che se $y_0 = \frac{1}{2}(2+3x_0)$, allora l'unica soluzione è data da $y = 1 + \frac{3}{2}x$.

Esercizio 2

La matrice associata alla parte lineare di ordine due è

$$\begin{bmatrix} x-1, & \frac{y-3}{2} \\ \frac{y-3}{2}, & y-3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Quindi l'operatore sarà ellittico se $(x-1)\frac{y-3}{2} - \frac{(y-3)^2}{4} > 0$ ovvero, raccogliendo, se $\frac{y-3}{2}(x - 1 - \frac{y-3}{2}) > 0$. Cioè se $(y-3)(2x-y+1) > 0$. Vale a dire quando $y > 3$ e $y < 1+2x$ vel $y < 3$ e $1 + 2x < y$.

L'operatore è parabolico se $y = 3$ vel $y = 1 + 2x$.

L'operatore è iperbolico se $y < 3$ e $y < 1 + 2x$ vel $y > 3$ e $1 + 2x < y$.

Esercizio 3

L'equazione caratteristica è $\gamma^2 + \lambda = 0$. Esaminiamo i tre casi possibili.

Caso (1): $\lambda > 0$. Le soluzioni sono complesse coniugate rispettivamente $\gamma_1 = i\sqrt{-\lambda}$ e $\gamma_2 = -i\sqrt{-\lambda}$. Allora l'integrale generale è $y_G = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$. Pertanto $y'_G = -\sqrt{-\lambda}c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + \sqrt{-\lambda}c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)$. Quindi avremo $y_G(0) = c_1$, $y_G(2) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}2) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}2)$, da cui segue: $c_1(1+\cos(\sqrt{-\lambda}2))+c_2 \cos(\sqrt{-\lambda}2) = 0$. Inoltre $y'_G(0) = \sqrt{-\lambda}c_2 = 0$. Pertanto $c_2 = 0$, e $\cos(\sqrt{-\lambda}2) = -1$. Finalmente risulta $\sqrt{-\lambda}2 = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi ricaviamo $-\lambda_k = \frac{(1+2k)^2\pi^2}{4}$. Inoltre sostituendo nell'equazioni ricavate in precedenza avremo che $c_2 = 0$ mentre c_1 è libero. Quindi le autofunzioni corrispondenti agli autovalori λ_k sono generate da $y_k = \cos(\sqrt{-\lambda}x)$.

L'integrale generale di $y'' + 4y = 0$ è $c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$. Inoltre, cercando con il metodo per simpatia una soluzione particolare di $y'' + 4y = x$, otteniamo che dovrà essere della forma $ax + b$ con a e b costanti da determinare. Quindi, sostituendo si ottiene $4(ax + b) = x$, da cui segue, per il principio d'identit dei polinomi che $b = 0$ e $a = 1/4$. Pertanto l'integrale generale di $y'' + 4y = x$ è: $c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}x$.

Esercizio 4

Calcoliamo gli autovalori della matrice associata al sistema omogeneo risolvendo l'equazione

$$\det(\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 2 \end{bmatrix} - \lambda I) = 0. \tag{3}$$

Avremo $(1-\lambda)(2-\lambda) - 4 = 0$. Ovvero $\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$. Da cui segue $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$. Determiniamo l'autospazio associato a λ_1 risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1, & 2 \\ 2, & 2-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Moltiplicando la prima riga per $\frac{2}{1-\lambda_1}$ e sottraendola alla seconda otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1, & 2 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Quindi

$$\mathrm{Ker}(\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 2 \end{bmatrix} - \lambda_1 I) = \mathrm{span}\{(1, -\frac{1-\lambda_1}{2})\}. \tag{6}$$

Analogamente determiniamo l'autospazio associato a λ_2 risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2, & 2 \\ 2, & 2-\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Moltiplicando la prima riga per $\frac{2}{1-\lambda_2}$ e sottraendola alla seconda otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_2, & 2 \\ 0, & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Quindi

$$\mathrm{Ker}(\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 2 \end{bmatrix} - \lambda_2 I) = \mathrm{span}\{(1, -\frac{1-\lambda_2}{2})\}. \tag{9}$$

Una matrice fondamentale del sistema omogeneo è:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2}e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Pertanto, se $x = 0$ otteniamo la matrice

$$\begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Da cui segue che

$$\bar{c}_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ 0, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}} = \frac{-\frac{1-\lambda_2}{2}}{-\frac{1-\lambda_2}{2} + \frac{1-\lambda_1}{2}} = \frac{1-\lambda_2}{1-\lambda_2-1+\lambda_1} = \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \tag{12}$$

e

$$\bar{c}_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}} = \frac{\frac{1-\lambda_1}{2}}{-\frac{1-\lambda_2}{2} + \frac{1-\lambda_1}{2}} = \frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1-1+\lambda_2} = \frac{1-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}. \tag{13}$$

Pertanto la soluzione del problema di Cauchy sarà:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

(Facoltativo). Infine per determinare una soluzione particolare del sistema non omogeneo utilizziamo il metodo delle variazioni delle costanti di Lagrange ottenendo

$$\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Quindi

$$\alpha_1' = \frac{\det \begin{bmatrix} 0, & e^{\lambda_2 x} \\ 1, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}} = e^{-\lambda_1 x} \frac{\det \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}} \tag{16}$$

e

$$\alpha_2' = \frac{\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & 0 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}} = e^{-\lambda_2 x} \frac{\det \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}} \tag{17}$$

Finalmente otteniamo, integrando, le seguenti funzioni:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 x} \frac{\det \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ 1, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}} \tag{18}$$

e

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 x} \frac{\det \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ -\frac{1-\lambda_1}{2}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} \end{bmatrix}}. \tag{19}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea si esprime quindi come

$$\left[\begin{array}{cc} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x} \\ -\frac{1-\lambda_1}{2} e^{\lambda_1 x}, & -\frac{1-\lambda_2}{2} e^{\lambda_2 x} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array}\right]. \tag{20}$$